Dan Savatovsky,
Université de Bourgogne, UMR 7597 du CNRS « Histoire des Théories Linguistiques »

Logique du temps, logique modale et histoire des théories

Biennale d'histoire des théories linguistiques
« Qu'est-ce que l'historicité des idées linguistiques ? »
Porquerolles, 31 août – 5 septembre 2009

A. Argumentaire

Ce volet du premier atelier de la biennale est consacré à la saisie par la logique contemporaine de son propre régime de temporalité et d'historicité. On indiquera d'abord pourquoi, au sein de la philosophie analytique (depuis le *linguistic turn* de Frege-Peirce-Russell jusqu'à Hintikka, notamment) et de son « noyau dur » (la sémantique logique), l'histoire des théories ne figure pas comme un sujet d'étude subalterne. Elle a partie liée, sur un mode intime, aux analyses et aux présupposés mêmes de ce domaine qui offre des procédures de calcul ou des modèles permettant de décrire les formes de discursivité en vigueur dans la découverte et l'exposition des savoirs. Originellement vouée au calcul de certains types d'expressions (comme les contextes modaux, les attitudes propositionnelles et les contextes épistémiques, pour ce qui nous concerne), la sémantique logique présente ici un double intérêt : *i*). elle permet d'analyser les modalités d'argumentation, de démonstration, d'explication en vigueur dans l'histoire des sciences - une analyse rendue plus puissante depuis le développement des sémantiques intensionnelles, parmi lesquelles la sémantique des mondes possibles. *ii*) elle fournit un cadre dans lequel assigner l'inter-traduction de théories appartenant à des horizons de pensée différents ou séparés par des intervalles historiques. Elle permet ainsi d'envisager à nouveaux frais les thèmes devenus classiques de la (ou de l'in)commensurabilité des théories scientifiques, de la coextension des concepts issus de théories différentes (l'indétermination de la traduction), de l'extensionnalisme comme cadre d'une sémantique des énoncés scientifiques ou philosophiques.

Il sera d'abord question du temps dans la langue : on s'attachera à retracer succinctement l'histoire des rapports entre l'étude des modalités (qui participe de la logique épistémique) et la logique du temps, depuis Diodore Cronos jusqu'à Lewis et Prior, en montrant à quelles conditions et sous quelles formes le temps est un objet devenu calculable dans une sémantique des mondes possibles.

Puis l'on s'attachera à l'un des prolongements de cette sémantique des mondes possibles, la théorie des jeux de Hintikka. Appliquée à l'histoire des sciences, et notamment des sciences expérimentales, la théorie des jeux permet de décrire le face-à-face entre le Savant et la Nature (instances abstraites) comme un jeu à somme nulle où le Savant cherche à vérifier et la Nature à falsifier les énoncés d'une théorie donnée. Comme procédure, la vérification expérimentale sera alors assimilée à une stratégie gagnante dans un modèle M. Cette stratégie devient à son tour un *fait objectif* dans un modèle M1. Conformément à la définition tarskienne de la vérité, la théorie vérificationniste, comprise comme dispositif stratégique devient alors compatible avec une logique véríconditionnelle de type classique. Et si les faits objectifs (les stratégies gagnantes) décrites dans le modèle M1 relèvent d'un état ancien de la science, la sémantique des jeux pourra contribuer à fournir au type de temporalité à l'œuvre dans l'histoire des sciences un cadre conceptuel de référence.

B. Documents de travail

1. Arthur N. Prior, *Time and Modality [Temps et modalité]*, 1957. Oxford, Clarendon. (Trad. D. Savatovsky)

Chap. II. La logique du temps et un analogue de S4 (extraits)

« Ces conférences sont consacrées à un type de logique, la logique des temps (*the logic of tenses*)[1], qui est presque aussi distante de ce qu'on entend d'ordinaire par logique modale que le système modal de Łukasiewicz (*Ł-modal system*) – en d'autres termes, que la théorie de la quantification. Je montrerai cependant qu'il s'agit bien d'une logique modale au sens de Łukasiewicz et même qu'elle est structurellement tout à fait comparable aux autres systèmes que nous n'hésitons pas à classer parmi les systèmes modaux ; et qu'on peut aussi la représenter, voire qu'elle gagne à être représentée, comme un système à valeurs multiples.

Dans la logique des temps, on emploie les variables propositionnelles ordinaires *p, q, r*, etc., en lieu et place d'énoncés (*statements*), même si le terme *énoncé* ne doit pas être pris au sens qu'on lui donne aujourd'hui, mais plutôt au sens que lui donnaient, sous le nom de *jugement*, les logiciens de l'antiquité et du moyen âge. Si ces variables tiennent lieu d'« énoncés », c'est dans la mesure où la valeur de vérité d'un énoncé peut être différente à différents temps (*times*) – dans la mesure où, par exemple, « C'est l'été en Angleterre » est un énoncé dont on en peut dire qu'il est faux maintenant, mais qu'il sera vrai dans quelques mois. J'emploierai pour commencer les symboles *P* et *F* ; ils signifient respectivement : « Ça a été le cas que » et « Ce sera le cas que ». Précision préalable au sujet de la valeur exacte de ces deux opérateurs : l'énoncé « Ce sera le cas que le Pr. Carnap vole vers la lune », tel que je l'entends, n'est pas un énoncé portant sur l'énoncé « le Pr Carnap vole vers la lune », mais un nouvel énoncé portant sur le Pr Carnap et formé à partir de l'énoncé simple grâce à l'opérateur *F.* Il équivaut exactement à la forme usuelle « Le Pr. Carnap volera vers la lune ». Bref, la fonction de l'opérateur est de former un énoncé au futur (*a future-tense statement*) à partir de l'énoncé correspondant au présent. L'énoncé au futur ne porte pas sur l'énoncé au présent, mais il porte précisément sur ce sur quoi porte l'énoncé au présent. Ceci vaut *mutatis mutandis* pour l'opérateur « Ça a été le cas que » et, selon moi, également pour les opérateurs « il est possible que » et « je pense que ». « Ça a été le cas que le Pr. Carnap vole vers la lune », « Il est possible que le Pr. Carnap vole vers la lune » et « Je pense que le Pr. Carnap vole vers la lune » : tous ces énoncés portent sur le Pr. Carnap ; ils ne portent pas sur l'énoncé « Le Pr. Carnap vole vers la lune ».

Bien que l'énoncé « Ce sera le cas que le Pr. Carnap vole vers la lune », c'est-à-dire « Le Pr. Carnap volera vers la lune » ne soit pas exactement un énoncé portant sur l'énoncé « Le Pr. Carnap vole vers la lune », nous pouvons dire que l'énoncé au futur *est* vrai si et seulement si l'énoncé au présent *sera* vrai. De façon similaire, l'énoncé au passé « Ça a été le cas que le Pr. Carnap vole vers la lune », c'est-à-dire « Le Pr. Carnap volait vers la lune » *est* vrai si et seulement si l'énoncé au présent « Le Pr. Carnap vole vers la lune » *a été* vrai ; l'énoncé modal « il est possible que le Pr. Carnap vole vers la lune » *est* vrai si et seulement si l'énoncé assertorique « Le Pr. Carnap vole vers la lune » *peut être* vrai ; et l'énoncé « on croit que le Pr. Carnap se dirige vers la lune » *est* vrai si et seulement si *on croit* que l'énoncé simple « Le Pr. Carnap se dirige vers la lune » est vrai. Des règles sémantiques de ce type ont été établies par les scolastiques et elles sont après tout aussi simples qu'évidentes[2]. On peut appliquer des règles du même type aux opérateurs composés et itératifs. Ainsi, l'énoncé « Ce sera le cas qu'il sera le cas que le Pr. Carnap vole vers la lune » *est* vrai si et seulement si l'énoncé « Ce sera le cas que le Pr. Carnap vole vers la lune » *sera* vrai ; et l'énoncé « Ce sera le cas qu'il a été le cas que le Pr. Carnap est en route pour la lune » ou, plus couramment formulé : « Le Pr. Carnap aura été en route pour la lune » *est* vrai si et seulement si l'énoncé au passé « Le Pr. Carnap était en route pour la lune » *sera* vrai.

Nous pourrions également introduire dans notre système l'opérateur du présent « C'est le cas que », mais on s'apercevra aisément que cela créerait une difficulté inutile. Car l'énoncé « C'est le cas que le Pr. Carnap vole vers la lune » *est* vrai si et seulement si l'énoncé « Le Pr. Carnap vole vers la lune » *est* vrai ; il *sera* vrai si et seulement si l'énoncé simple *sera* vrai ; il *a été* vrai si et seulement si l'énoncé simple *a été* vrai. Pour dire les choses en termes plus métaphysiques, *la présence de la présence* d'un événement ou d'un état de choses est simultanée à la *présence* de cet événement ou de cet état et cette présence à son tour est simultanée à cet événement et à cet état. La « *futurité* » (*futurity*) *de la présence* d'un événement ou d'un état de choses est simultanée à la *futurité* de l'événement lui-même ou de l'état ; elle est ainsi la *présence de la futurité* de cet événement ou de cet état. La « *passéité* » (*pastness*) *de la présence* d'un événement ou d'un état de choses est simultanée à la *passéité* de l'événement ou de l'état eux-mêmes ; elle est ainsi la *présence de la passéité* de l'événement ou de l'état. En employant « *S* » pour « C'est ce cas que », nous pouvons représenter ces vérités en langage symbolique par les équations

[1] Nous indiquerons entre parenthèses dans quel cas nous employons « temps » pour traduire *tense(s)* et dans quel cas pour traduire *time(s)* toutes les fois que l'auteur cesse d'employer l'un de ces deux mots au profit de l'autre (NdT).

[2] Voir Moody, *Truth and Consequence in Medevial Logic*, 1953, pp. 53-54.

$SSp = Sp = p$, $SFp = FSp = Fp$ et $SPp = PSp = Pp$.

L'idée selon laquelle il serait nécessaire d'introduire un opérateur spécial pour le présent aurait de surcroît des conséquences formelles très fâcheuses. Car dire d'un tel opérateur qu'il est nécessaire, c'est dire que les expressions auxquelles nous le lierions ne seraient pas des propositions, des propositions temporellement marquées, si elles n'étaient pas formées à partir de lui. Cela reviendrait à dire que les opérateurs de temps (*tense-operators*) ne permettent pas de former des propositions à partir d'autres propositions temporellement marquées ; ou plutôt qu'ils permettent de former des propositions à partir d'une simple juxtaposition de noms et de verbes, c'est-à-dire de former des propositions temporellement marquées à partir de propositions temporellement non-marquées. Il s'ensuivrait que les opérateurs de temps ne seraient pas itératifs et ne pourraient être liés à des propositions auxquelles des opérateurs de temps seraient déjà liés. Il nous faudrait donc éliminer des formes du type « Ce sera le cas qu'il a été le cas que *p* ». On aurait de la sorte détruit toute la logique du temps avant même d'avoir entrepris de la construire.

J'emploierai aussi les opérateurs ordinaires qui permettent de construire les fonctions de vérité dans la notation de Łukasiewicz – $\mathcal{N}$ pour « Ce n'est pas le cas que » ; $\mathcal{K}$ pour « et » ; $\mathcal{A}$ pour le « ou » non exclusif ; $\mathcal{C}$ pour « si », c'est-à-dire pour l'implication matérielle ; et $\mathcal{E}$ pour « si et seulement si », c'est-à-dire pour l'équivalence matérielle. Des formes comme $\mathcal{N}p$ et $\mathcal{K}pq$ peuvent, comme les formes plus simples qu'elles contiennent, être liées à différentes valeurs de vérité à différents temps (*at different times*). $\mathcal{N}p$ est vrai à tous les temps où *p* est faux et faux à tous les temps où *p* est vrai ; $\mathcal{K}pq$ est vrai à tous les temps où *p* et *q* sont tous les deux vrais et faux à tous les autres temps ; et les autres opérateurs de vérité peuvent être définis en termes de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{N}$, comme à l'ordinaire. A titre d'exemple de $\mathcal{K}pq$, nous pouvons prendre « Il a plu et il neigera » (*It has been raining and it will be snowing*) : ceci est vrai à tous les temps (*times*) où « Il pleut » a été vrai et « Il neige » sera vrai – et seulement à ces temps-là. La question de savoir à quel temps verbal (*tense*) s'emploie une forme comme celle-ci ou même s'il y a un temps auquel elle s'emploie est une question strictement linguistique (*verbal*). Nous ne disposons d'aucun mot en anglais pour désigner le temps de cette forme – pas plus, à ma connaissance, que dans aucune autre langue ; mais nous pourrions en créer un si nous le voulions : dans tous les cas ses conditions de vérité sont parfaitement claires. Et cette forme a un temps, c'est-à-dire qu'elle est temporellement marquée, si du moins l'on veut dire par là que nous devons référer au temps en énonçant ses conditions de vérité. On ne peut répondre à la question de savoir si elle a un temps dans un autre sens (*sense*) que lorsque cet autre sens est expliqué.

L'opérateur $\mathcal{N}$ introduit lui aussi des distinctions temporelles en deçà et au-delà des distinctions simples que nous avons exposées pour commencer. $\mathcal{N}Fp$, « Ce ne sera pas le cas que *p* » est sans nul doute un futur (*future tense*) d'un certain type, mais pas du même type que « Ce sera le cas que non *p* », $F\mathcal{N}p$. S'il était du même type, alors $\mathcal{N}F\mathcal{N}p$, « Ce ne sera pas le cas que non *p* » serait identique à $F\mathcal{N}\mathcal{N}p$, donc au simple Fp, « Ce sera le cas que *p* ». Mais en réalité « Ce ne sera pas le cas que non *p* » est une forme plus puissante que « Ce sera le cas que *p* » ; elle signifie quelque chose de plus, quelque chose comme : « Ce sera toujours le cas que *p* ». De façon similaire, $\mathcal{N}P\mathcal{N}p$, « Ça n'a pas été le cas que non *p* » est une forme plus puissante que le simple Pp, « Ça a été le cas que *p* » et signifie plutôt quelque chose comme : « Ça a toujours été le cas que *p* ».

Ces différences peuvent apparaître plus clairement si nous modifions un tant soit peu notre symbolisme. Jusqu'ici, nous avons employé *P* et *F* comme des opérateurs simplement monadiques permettant de former des énoncés. Mais nous pouvons aussi les employer autrement, comme des opérateurs dyadiques dont le premier argument est la mesure d'un intervalle de temps (*time-interval*) et le second un énoncé. En employant *P* en ce sens, la forme Pnp signifiera « C'était le cas, il y a *n* jours que *p* » (si nous nous servons des jours comme unités de temps). $P1p$, par exemple, signifiera « C'était le cas la veille de tel jour que *p* ». Fnp signifiera de manière similaire « Ce sera le cas d'ici *n* jours » ; par exemple $F1p$ signifiera « ce sera le cas le lendemain de tel jour que *p* ». Les *P* et *F* que nous avons employés jusqu'ici peuvent être redéfinis au moyen du quantificateur existentiel : « Ce sera le cas que *p* » devient désormais « il y a un *n* tel que ce sera le cas d'ici *n* jours que *p* » , $\exists nFnp$; et notre Pp initial devient de manière similaire $\exists nPnp$[3]. « Ce ne sera pas le cas que non *p* » sera désormais analysé comme « Il n'y a pas de *n* tel que ce sera le cas d'ici *n* jours que non *p* », $\mathcal{N}\exists n\, Fn\, \mathcal{N}p$; et il en va de même avec « Ce sera toujours le cas que *p* » ou « Pour tout *n*, ce sera le cas d'ici *n* jours que *p* », $\forall nFnp$. La théorie ordinaire de la quantification, dans laquelle $\forall x$ équivaut à $\mathcal{N}\exists x\, \mathcal{N}$, garantit l'équivalence de cette dernière forme $\forall nFnp$ à $\mathcal{N}\exists n\, \mathcal{N}Fnp$, « Il n'y a pas de *n* tel que ce ne sera pas le cas d'ici *n* jours que *p* ». Que la

---

[3] *Nous avons remplacé par les symboles usuels (∃ pour le quantificateur existentiel et ∀ pour le quantificateur universel) les symboles dont Prior se sert (Σ et Π, respectivement* (NdT).

forme $\mathcal{N}\exists n\ Fn\ \mathcal{N}p$, « Il n'y a pas de *n* tel que ce sera le cas d'ici *n* jours que non *p* », soit équivalente à $\mathcal{N}\exists n\ \mathcal{N}Fnp$, cela dépend de la question de savoir si la forme

« Ce ne sera pas le cas d'ici *n* jours que *p* »

équivaut à la forme

« Ce sera le cas d'ici *n* jours que non *p* » ;

c'est-à-dire si $\mathcal{N}Fnp$ équivaut à $Fn\ \mathcal{N}p$. Il y a bien des raisons pour questionner une telle équivalence, des raisons assez complexes – nous les envisagerons plus bas – mais nous l'admettrons en attendant et nous construirons notre système sur cette assomption.

Je montrerai maintenant que la logique du temps (*tense-logic*), telle que je l'ai décrite, est bien un système modal et que si nous définissons *M* (ou « Possiblement ») comme « Il est ou il sera le cas que », et *L* (ou « Nécessairement ») comme « Il est et il sera toujours le cas que », ces deux opérateurs remplissent les conditions que Łukasiewicz assigne aux opérateurs modaux et qu'ils détiennent de surcroît les propriétés formelles de *M* et de *L* dans le système S4 de Lewis[4]. « Possiblement » et « Nécessairement » ont été employés par le logicien mégarique Diodore et j'ai ailleurs mis en évidence la ressemblance qu'il y a entre la logique modale diodorienne et S4 (Prior, 1955) ; mais ma démonstration exige d'être renforcée sur ce point et conduite de manière légèrement différente. De la logique du temps telle que je l'ai décrite, nous n'avons besoin de garder qu'une partie, celle qui contient l'opérateur *F*. J'apporterai une simple modification à cette partie en admettant comme un cas particulier de la forme *Fn,* la forme $F0p$, « Ce sera le cas d'ici aucune unité de temps que *p* ». Cette forme équivaut bien entendu au simple *p*, et le fait qu'elle implique *p* sera l'un de mes axiomes. Voici donc l'ensemble des postulats que je veux utiliser :

* Définitions[5] : Df. *L* : $Lp = \forall nFnp$
Df. *M* : $Mp = \exists nFnp$

** Règles : Substitution. Détachement. Règles ∀1, ∀2, ∃1 et ∃2 de Łukasiewicz (règles d'introduction des quantificateurs). A quoi j'ajoute la règle spéciale :

RF : Si α est une loi, alors $Fn\alpha$ est une loi.

*** Axiomes : Tout ensemble complet d'axiomes du calcul des propositions, auxquels j'adjoins :

1. $CFn\ \mathcal{N}p\ \mathcal{N}Fnp$
2. $C\mathcal{N}FnpFn\ \mathcal{N}p$
3. $CFnCpqCFnpFnq$
4. $CF0pp$
5. $CFmFnpFSmnp$
6. $CFm\exists nFnp\exists nFmFnp$

Dans l'axiome 5, l'opérateur *S* est un opérateur temporel (*a time-forming operator on times*) tel que l'intervalle de temps *Smn* puisse être pensé comme la somme des intervalles *m* et *n*. Il s'ensuit que l'axiome 5 asserte que si ce sera le cas d'ici *m* jours que ce sera le cas d'ici *n* jours que *p*, alors ce sera le cas d'ici $m + n$ jours que *p*. Les autres axiomes ne poseront pas problème, me semble-t-il, s'ils sont pris à la lettre. Quant à l'axiome 2, comme on l'a vu, quels que soient les doutes qu'il peut

[4] Clarence Irwing Lewis (1917) retient cinq systèmes modaux numérotés du plus faible au plus fort, S1, S2, S3, S4, S5. On passe d'un système à un autre soit par addition d'un axiome supplémentaire, soit par substitution d'un axiome plus fort à un axiome plus faible, la faiblesse relative d'un axiome par rapport à un autre se reconnaissant à ce que le premier peut se déduire du second sans que la réciproque soit vraie. Voir Gardies, 1975, pp. 41-46 et ci-dessous, partie 2.1. de l'exemplier, l'axiomatisation de S4. (NdT)

[5] L'application de ces définitions (…) est soumise au même type de restrictions que celles qui s'imposent aux substitutions ordinaires de variables dans des formules contenant des quantificateurs. Ni la substitution définitionnelle ni la substitution de variables ne peuvent s'opérer si cela devait transformer une variable liée en variable libre ou inversement. C'est ainsi que nous ne pouvons remplacer $\exists nFn$ par *M* ou inversement, ou bien $\forall nFn$ par *L* ou inversement si la formule qui les suit contient un *n* libre. Par exemple, $\exists nFnK\alpha F\mathcal{N}\beta$ ne peut équivaloir à $MK\alpha F\mathcal{N}\beta$. (…).

susciter, nous sommes convenus de renoncer à en tenir compte. Les définitions de *L* et de *M* sont les définitions diodoriennes – « est et sera toujours » et « est ou sera », le cas « est » étant inclus dans la forme générale *Fn* en tant que *F*0.

Les théorèmes suivants font partie de ceux qui peuvent être démontrés dans le système :

7. *CMp𝒩L𝒩p* (*C∃nFnp𝒩∀n𝒩Fnp* à partir de la théorie de la quantification ; et *C𝒩∀n𝒩Fnp𝒩∀nFn𝒩p* par transposition de *C∀nFn𝒩p∀n𝒩Fnp*, à partir de l'axiome 1 via ∀1 et ∀2).
8. *C𝒩L𝒩pMp* (idem que 7, mais à partir de l'axiome 2)
9. *CLpp* (*C∀nFnpF0p* à partir de 5 via la théorie de la quantification ; à partir de quoi *C∀nFnpp* via l'axiome 4 et par syllogisme)
10. *CLCpqCLpLq* (à partir de l'axiome 3 et la théorie de la quantification).
11. *CLpLLp* (à partir de quoi *C∀mnFmFnp∃nFnp*, via l'axiome 6 et la théorie de la quantification ; à partir de quoi *C∃mFm∃nFn∃nFnp*, ou *CMMpMp*, via la théorie de la quantification ; et à partir de quoi *CLpLLp* au moyen des transpositions usuelles, etc.).

Et nous pouvons démontrer les règles de dérivation suivantes :

12. Si α est un théorème, alors $L\alpha$ en est un (par RF et la règle d'universalisation de la théorie de la quantification, dérivable de ∀2).
13. Si $C\alpha\beta$ est un théorème, alors $CF\alpha nFn\beta$ en est un (RF et axiome 3).

La règle 13 nous suffit, outre le calcul des propositions et la théorie de la quantification, pour montrer que si α et β s'impliquent logiquement l'un l'autre, ils sont substituables l'un à l'autre dans n'importe quelle formule du système. Ceci donne aux implications mutuelles 7 et 8 la valeur d'une définition de *M* comme *NLN*. (…). » (Prior, 1957, pp. 8-14).

Chap. VI. Une logique modale dans le style de Frege (extraits)

« Je me suis fondé jusqu'ici, librement et de manière non critique, sur une théorie de la quantification qu'on peut considérer comme étant globalement russellienne, qui utilise l'appareil typiquement russellien des noms propres logiques, des prédicats et des descriptions définies. Il faut admettre cependant que ce type de logique est désormais un peu passé de mode (…). Voyons comment les choses se présentent si, au lieu de prendre modèle sur Russell, nous prenons modèle sur Frege. A dire vrai, je ne propose pas ici de développer une logique du temps (*tense logic*) de type frégéen ; je chercherai plutôt à développer en style frégéen la logique modale ordinaire telle qu'on peut l'étendre et l'adapter à la logique du temps (..). Et en premier lieu, il me paraît souhaitable de dire quelques mots sur la logique de Frege en général.

La théorie à laquelle le nom de Frege est tout spécialement associé peut paraître mystérieuse à première vue quand on la présente – c'est souvent le cas – comme une théorie selon laquelle les phrases (*sentences*) sont des noms de valeurs de vérité. Je ne crois pas dénaturer le point de vue de Frege – il me semble en tout cas lui ôter ainsi de son mystère – en considérant qu'il envisage non pas les phrases mais les segments de phrase en *que* (*'that' clauses*), du type : « … *que* César a conquis la Gaule », « … *que* Pégase est blanc », etc. Ce sont bien ces derniers qui apparaissent comme des noms ; ils équivalent aux formulations (*phrases*) du type : « la conquête de la Gaule par César », « la blancheur de Pégase », etc., lesquelles ressemblent davantage à des noms. Il paraît sans doute désuet d'appeler « le vrai » et « le faux » les objets dénommés par des expressions comme « la conquête de la Gaule par César » ou par quoi que ce soit d'autre ; mais peut-être pouvons-nous alors nous représenter « le vrai » comme étant simplement « la vérité », la totalité des faits. Quant à ce qu'on appelle « le faux », R. J. Butler a suggéré que si nous nous représentons « nommer le vrai » comme une sorte de geste indiquant la vérité, nous pourrions nous représenter « nommer le faux » comme un geste indiquant la direction opposée. Mais peu importent ces béquilles offertes à l'intuition. Ce qui importe c'est que, lorsqu'un énoncé (*statement*) est vrai, Frege pense le membre de phrase en *que* comme étant normalement un nom pour le vrai et, lorsqu'un énoncé est faux, le segment en *que* comme étant un nom pour le faux.

Pour Frege, l'expression (*expression*) « …que César a conquis la Gaule » est donc, dans les contextes ordinaires, un nom du vrai ou de la vérité et l'expression « …que deux et deux font quatre » est un autre nom du même objet – de la même manière que « l'étoile du soir » et « l'étoile du matin » sont deux noms distincts pour un même objet. Certes ces formulations (« l'étoile du matin » et « l'étoile du soir »), bien qu'elles dénomment le même objet, ne sont pas seulement des formulations différentes, mais elles ont aussi un sens ou une signification (*sense or meaning*) différents. Ceci vaut encore plus clairement pour les noms « …que César a conquis la Gaule » et « …que deux et deux font quatre » : dans certains contextes, c'est cette signification ou ce sens-là qui sont nommés par la formulation ou le segment de phrase plutôt que ce qui est nommé ordinairement – qu'il s'agisse de la vérité, de Vénus ou de quoi que ce soit d'autre. Frege donne à cet égard un exemple de discours indirect. On peut croire que 2 et 2 font 4 sans croire que César a conquis la Gaule ; mais si, dans cet énoncé, les formulations « …que 2 et 2 font 4 » et « …que César a conquis la Gaule » réfèrent au même objet, nous imputerions des attributs contradictoires à cet objet auquel X croit et ne croit pas à la fois. Dans ce contexte, par conséquent, ce dont il est question n'est pas la valeur de vérité, mais les sens des expressions concernées, et ces sens sont bien entendu différents l'un de l'autre. Le Pr. Church a suggéré – et nous le suivrons sur ce point, comme cela nous arrive souvent – que c'est aussi ce dont il est question dans les contextes modaux (A. Church, « A Formulation of the Logic of Sense and Denotation », in *Structure, Method and Meaning*, 1951).

Dans l'expression

« *La nécessité que Church soit Church* »,

ou, en d'autre termes :

« *La nécessité pour Church d'être Church* »,

Le segment de phrase en *que* n'est pas employé comme un nom pour la vérité, mais comme un nom pour ce qui est ordinairement le *sens* de ce segment. Cependant, l'expression prise comme un tout se comporte bien, dans les contextes normaux, comme un nom pour une valeur de vérité, voire pour la vérité tout court.

Tout ceci paraîtrait plus clair si nous utilisions une notation différente, par exemple si nous écrivions en lettres capitales toute expression utilisée pour nommer ce qui est ordinairement son sens. Nous pourrions dire ainsi que l'expression « POUR CHURCH D'ETRE CHURCH » nomme le sens de l'expression « *Pour Church d'être Church* » qui, à son tour, est un nom pour la vérité. Du point de vue de Church, les opérateurs « Que … est nécessaire » ou « La nécessité pour … » construisent le nom d'une valeur de vérité non pas à partir d'un autre nom de la valeur de vérité, mais à partir d'un autre nom du sens des expressions correspondantes. En sorte que nous pourrions écrire « La nécessité POUR CHURCH D'ETTRE CHURCH » en lieu et place du nom employé ci-dessus pour la valeur de vérité.

Cette façon de procéder est assortie d'un bénéfice secondaire : la logique de la nécessité qui en découle n'est pas une logique modale au sens de Lukasiewicz. Car ce qui tient lieu d'énoncés dans la logique de Frege, ce sont les noms de valeurs de vérité. Ainsi, ce qui pourrait correspondre dans cette logique à un opérateur permettant de former un énoncé sur des énoncés serait un opérateur permettant de former des noms de valeurs de vérité à partir d'autres noms de valeurs de vérité. Or l'opérateur de nécessité de Church n'est pas un opérateur de ce type dans la mesure où les noms de valeurs de vérité qu'il permet de former ne le sont pas à partir des noms de valeurs de vérité, mais à partir des noms du sens des noms de valeurs de vérité. » (Prior, 1957, pp. 55-57).

2. Jean-Louis Gardies, *La logique du temps*, Paris, PUF, 1975.

2.1. Chapitre I. Les précurseurs (extraits)

i. Aristote et les futurs contingents. Diodore Cronos et le rôle du temps dans l'implication

« Que le temps ne fût pas indifférent à la valeur logique des propositions, Aristote l'avait déjà mentionné au chapitre 9 du *De l'interprétation*, dans lequel il s'interrogeait sur la possibilité d'étendre la validité du principe du tiers exclu aux événements futurs contingents. Car enfin, si l'on admet que le *principe du tiers exclu*, lequel pose que d'une proposition quelconque et de sa négation, l'une au moins est nécessairement vraie, vaut aussi pour tous les événements futurs, alors « rien n'est, ni ne devient, soit par l'effet du hasard, soit d'une manière indéterminée, rien qui, dans l'avenir, puisse indifféremment être ou n'être pas ; mais tout découle de la nécessité, sans aucune détermination » (*Organon*, II, *De l'interprétation*, trad. Tricot, Vrin, 1959, p. 97). En vertu de ce raisonnement, continuait Aristote, « il n'y aurait plus à délibérer, ni à se donner de la peine, dans la croyance que si nous accomplissons telle action, tel résultat suivra, et que si nous ne l'accomplissons pas, ce résultat ne suivra pas. » (*ibid.*, p. 99). Le souci de conserver sa place à la liberté de la décision humaine obligeait ainsi le Stagirite à limiter la validité du *tiers exclu* aux événements passés ou présents, ainsi qu'aux seuls événements futurs qui fussent l'effet d'un déterminisme reconnu. Parmi les événements qui ne sont pas encore, n'y en a-t-il pas qui peuvent être ou ne pas être et dont les propositions qui aujourd'hui les expriment ne sont de ce fait ni vraies ni fausses ?

Mais cette réflexion sur l'interférence du temps dans la valeur logique des propositions, qui devait des siècles plus tard être à l'origine de la *querelle* scolastique des *futurs contingents*, puis, à l'époque contemporaine, de la construction par Łukasiewicz de la première logique qui ne s'attachât pas à la simple bivalence du *vrai* et du *faux*, n'a pas eu d'autre prolongement dans l'œuvre même d'Aristote. Tel ne fut pas le cas dans l'*Ecole de Mégare*, dont l'un des plus remarquables représentants, Diodore Cronos, élève immédiat du fondateur de l'Ecole, Euclide de Mégare, qui avait été lui-même l'élève de Socrate, fut amené, sur deux thèmes différents, à pousser aussi loin son analyse des répercussions du temps sur la logique des propositions.

Le premier de ces thèmes concernait ce qu'on pourrait appeler la première *querelle de l'implication*. En cette fin du IV^e^ siècle avant J.-C. en effet, un autre représentant de la même *Ecole de Mégare*, Philon, avait, le premier semble-t-il, donné la définition précise de cette implication qui mérite d'être appelée philonienne et que réinventeront Frege puis Russell à la fin du XIX^e^ siècle. Que signifie l'implication :

si p, alors q,

ou plutôt, pour parler comme les mégariques et les stoïciens, qui employaient, pour désigner les variables propositionnelles, non les lettres de l'alphabet, mais les nombres ordinaux :

si le premier, alors le second ?

Philon de Mégare répondait que l'implication en question est vraie, à la seule condition qu'elle n'ait pas à la fois son antécédent vrai et son conséquent faux. Philon semblait avoir défini l'implication par une authentique *table de vérité* qui ne se distingue de nos *tables de vérité* actuellement enseignées que par l'ordre des lignes

- *Si l'antécédent est vrai et le conséquent vrai, la proposition est vraie*
- *Si l'antécédent est faux et le conséquent faux, la proposition est vraie*
- *Si l'antécédent est faux et le conséquent vrai, la proposition est vraie*
- *Si l'antécédent est vrai et le conséquent faux, la proposition est fausse.*

Cette définition de l'implication conduisait Philon à des paradoxes que Russell retrouvera à peu près tels quels à l'époque moderne. Elle l'obligeait en effet à admettre par exemple comme vraie, dans le cas où il ferait jour, la proposition :

S'il fait nuit, alors il fait jour,

puisque, l'antécédent étant alors faux et le conséquent vrai, elle se trouvait dans le cas mentionné à la troisième ligne de la précédente table de vérité. C'est en réintroduisant la dimension du temps à l'intérieur du discours logique que Diodore parvenait à justifier le sens commun dans son refus d'admettre la vérité d'une telle proposition : si cette proposition est bien fausse, déclarait Diodore, c'est parce que, lorsque la nuit viendra, cette proposition comportera alors un antécédent vrai et un conséquent faux. Car si l'implication philonienne est simplement celle qui commence avec le vrai et finit avec le faux, l'implication diodorienne est celle qui, commençant avec le vrai, *ne pouvait ni ne peut* finir avec le faux. Bref, si l'implication philonienne peut se noter comme l'implication russellienne :

$$p \supset q$$

formule exactement équivalente à :

$$\neg (p \,\&\, \neg q)$$

On ne peut donner en revanche une formalisation convenable de l'implication diodorienne qu'en faisant appel à des variables de temps

Quel que soit le moment t, il ne se trouve jamais que p soit vrai en t et q faux en t.

Ce qu'on pourrait symboliser sous la forme :

$$\forall\, t \neg [\mathrm{T}_t (p) \,\&\, \neg\, \mathrm{T}_i (q)]$$ [6]

Ainsi pour Diodore, la signification de la proposition :

Si le soleil s'est levé, alors il fait jour

Se trouve-t-elle appauvrie si on la lie à telle ou telle occurrence du lever du soleil. Cette proposition signifie qu'il n'existe pas dans la série des temps successifs une fois où le soleil se lève et le jour ne se fasse pas. » (…) (Gardies, 1975, pp. 20-23).

***ii.* Les réductions mégaro-stoïciennes des modalités à la considération du temps**

« Les réflexions originales de Diodore concernant la logique du temps avaient donné lieu à d'autres développements non moins intéressants par le biais des modalités. La logique modale, cette branche de la logique qui repose sur l'exploitation des propriétés des foncteurs *il est nécessaire que…, il est impossible que…, il est possible que…, il est contingent que…*, avait été largement inaugurée par Aristote qui avait retrouvé entre les modalités la même structure logique, appelée traditionnellement *carré d'Aristote*, qu'entre les propositions réparties selon ce que nous appelons aujourd'hui la quantification. En effet le rapport indiqué dans les Premières analytiques entre les quatre postes A (*tous*), E (*aucun*), I (*quelque* = au moins un) et O (*quelque…ne… pas*) est également relevé dans *De l'interprétation* entre le *nécessaire*, *l'impossible*, le *possible* et le *contingent*.

L'idée commune à la plupart des tentatives entreprises dans la tradition mégaro-stoïcienne était, nous le verrons, de ramener la logique modale à la logique du temps. Dans cette voie, la réduction la plus simple, celle que les mégariques avaient d'abord adoptée, consistait à définir le possible et le nécessaire de la façon suivante :

1. *Le possible est ce qui est réalisé dans quelque temps,*

Ce qu'on peut encore écrire sous la forme :

Il est possible que p si et seulement si $\exists t\, [\mathrm{T}_t (p)]$.

2. *Le nécessaire est ce qui est réalisé en tous temps*,

Ce qu'on peut écrire encore sous la forme :

Il est nécessaire que p si et seulement si $\forall t\, [\mathrm{T}_t (p)]$.

Ce sont sans doute ces définitions qui donneront au XII^{e} siècle à Averroès[7] l'idée d'étendre à la temporalité le carré d'Aristote et de réduire ainsi le carré modal au carré temporel.

---

[6] Pour ne pas forger gratuitement de nouveaux idéogrammes, nous empruntons à Nicholas Rescher et Alasdair Urquhart (1971) leur notation « $\mathrm{T}_t (p)$ » pour exprimer que « *p* est actuellement vrai au moment *t* ». la majuscule « T » rappelle évidemment ici l'initiale du mot anglais true (vrai). Les symboles « ∀ » et «¬ » sont pris dans le sens, aujourd'hui habituel en logique, respectivement du quantificateur universel (*quel que soit t* ou encore *pour tout t*) et de la négation propositionnelle.

[7] Cf. Rescher, Nicholas. 1967. *Temporal modalities in arabic logic*, Dordrecht, Reidel. pp. 33-34.

Toujours p et *Jamais p* sont des propositions *contraires*, comme disait la tradition aristotélicienne, nous dirions aujourd'hui *incompatibles*. *Quelquefois p* est la *subalterne* de *Toujours p*, *Quelquefois non p* la *subalterne* de *Jamais p* ; nous dirions aujourd'hui dans chacun de ces deux cas que la seconde proposition implique la première. *Quelquefois p* et *Quelquefois non p* sont *subcontraires* ; nous dirions, en vocabulaire russellien, qu'elles forment *disjonction*. Quant aux deux couples *Toujours – non Toujours* et *Jamais – Quelquefois*, que la tradition aristotélicienne qualifiait de *contradictoires*, nous pourrions dire aujourd'hui que chacun constitue une alternative. En admettant l'équivalence de *Il est nécessaire que p* avec *Toujours p*, de *Il est impossible que p* avec *Jamais p*, de *Il est possible que p* avec *Quelquefois p* et de *Il est contingent que p* avec *Quelquefois non p*, on réduit sans difficultés l'un à l'autre carré temporel et carré des modalités. On trouve également des traces d'une telle construction temporelle des modalités dans le Moyen Age chrétien, en particulier chez saint Thomas qui écrit dans le *De Caelo* que « ce qui est toujours, n'est pas tel par contingence, mais par nécessité », expression confirmée par la présence de sa contraposition dans la *Somme théologique* : « ce dont il est possible qu'il ne soit pas, parfois n'est pas ».

Mais la voie inaugurée par Diodore Cronos et suivie par la tradition stoïcienne était plus subtile encore. Il définissait les modalités non par référence à un instant quelconque du temps, mais par référence aux seuls instants présents ou futurs, à l'exclusion donc du passé. Pour Diodore

Il est possible que p si et seulement si il est maintenant vrai ou il sera vrai un jour que p

Ce que Rescher propose de symboliser par :

$\exists t[t \geqslant n \,\&\, \mathrm{T}_t\,(p)]$

Où n est une constante désignant l'instant actuel (*maintenant*, en anglais *now*). De même pour Diodore :

Il est nécessaire que p si et seulement si il est maintenant vrai et il sera toujours vrai que p
$\forall t[t \geqslant n \supset \mathrm{T}_t\,(p)]$

Il est impossible que p si et seulement si il n'est pas maintenant vrai ni ne sera jamais vrai que p
$\forall t[t \geqslant n \supset \neg \mathrm{T}_t\,(p)]$

Il n'est pas nécessaire que p (= il est contingent que *p*) *si et seulement si il n'est pas maintenant vrai ou ne sera pas vrai un jour que p*
$\exists t[t \geqslant n \,\&\, \neg\mathrm{T}_t\,(p)]$[8]

C'est pour justifier sa définition du possible que Diodore avait mis sur pied son « ». Ce « maître argument » consistait à juxtaposer trois propositions dont les deux premières étaient censées s'imposer par leur évidence et dont la troisième se présentait comme une négation de la définition diodorienne du possible :

1.*Toute proposition vraie portant sur le passé est nécessaire* ;
2.*L'impossible ne suit pas du possible* ;
3.*Quelque chose qui n'est pas vrai ni ne le sera est possible.*

Dans l'esprit de Diodore ces propositions étaient, à elles trois, incompatibles. L'évidence qu'il était difficile de dénier aux deux premières obligeait donc à conclure au rejet de la dernière, c'est-à-dire à admettre que :

S'il n'est pas vrai ni ne sera vrai que p, il n'est pas possible que p

Proposition que la reconnaissance implicite de ce que nous appelons aujourd'hui loi de Morgan autorisait à considérer comme équivalent à la proposition :

S'il est possible que p, alors il est vrai que p ou il sera vrai que p[9]

Une telle réduction des modalités aux normes était directement liée à l'introduction du déterminisme dans la philosophie mégarique puis stoïcienne, introduction que la tradition, après Cicéron, attribue encore à

[8] (…)
[9] (…)

Diodore. Car si seul ce qui est vrai maintenant ou sera vrai un jour est possible, l'action dont je me reconnais présentement le choix de la commettre demain ou de m'en abstenir, ne mérite d'être appelée aujourd'hui *possible* que si effectivement je la commets demain. Ainsi de toutes les actions que je ne commettrai pas est-il essentiellement vrai qu'il m'était impossible de les commettre. » (…) (Gardies, 1975, pp. 24-29)

2.2. Chapitre II. Logique du temps et modalités

***i.* La détermination d'un système modal privilégié au moyen d'une transposition temporelle. Situation de ce système entre S4 et S5 (…). (extraits)**

« (…) On est en droit de se demander si, dans le trop grand nombre des systèmes modaux définis par l'école de Lewis, l'astucieuse définition des modalités à partir du temps, proposée par Diodore Cronos, ne nous permettrait pas de faire un choix, c'est-à-dire de mettre le doigt sur un système que nous pourrions ainsi privilégier en vertu de ses qualités intuitives.

Or un rapide examen, sans le secours d'un quelconque calcul, permet déjà de voir que le système modal S4, et à plus forte raison tous les systèmes plus faibles, gardent toute leur valeur intuitive, tandis que l'axiome supplémentaire qui, ajouté à S4 constitue le système S5, cesse dans ce cas d'être intuitif et dépouille de ce fait le système S5 lui-même de toute valeur intuitive. S4 peut s'obtenir en ajoutant aux règles et axiomes du calcul des propositions une définition, une règle et trois axiomes :

* La définition consiste à réduire la possibilité (◊) à la nécessité (□) prise elle-même comme terme premier indéfini :

$$\Diamond A =_{def} \neg \Box \neg A$$

c'est-à-dire :

Il est possible que A $=_{def}$ *Il n'est pas nécessaire que non* A.

Une telle définition est parfaitement intuitive si l'on substitue en elle au *possible* et au *nécessaire* leur définition diodorienne :

Il est maintenant vrai ou il sera un jour vrai que A $=_{def}$ *Non* (*il est maintenant vrai et il sera toujours vrai que non* A).

En effet la partie droite de cette dernière définition est, en vertu de la *loi de De Morgan*, elle-même équivalente à :

Il n'est pas maintenant vrai ou il ne sera pas toujours vrai que non A.

Expression à son tour équivalente à la partie gauche de la définition.

** La règle s'exprime ordinairement de la manière suivante :

Si $\vdash A$, *alors* $\vdash \Box A$

c'est-à-dire que si « A » est une thèse déjà établie, « □ A » doit elle-même être admise comme thèse. La transposition diodorienne de cette règle ne l'altère nullement ; car si « A » est une thèse, c'est que cette proposition est vraie indépendamment même de toute condition temporelle ; il est donc en particulier maintenant vrai et il sera toujours vrai que A.

*** Les trois axiomes s'écrivent :

Ax 1. $\Box (p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$
Ax 2. $\Box p \supset p$
Ax 3. $\Box p \supset \Box \Box p$

Qui tous trois sont aussi intuitifs dans leur lecture modale que dans leur interprétation diodorienne :

Ax 1. *S'il est nécessaire que si p alors q, alors s'il est nécessaire que p alors il est nécessaire que q*,

c'est-à-dire :

S'il est maintenant vrai et sera toujours vrai que si p alors q, alors s'il est maintenant vrai et sera toujours vrai que p alors il est maintenant vrai et sera toujours vrai que q.

Ax 2. *S'il est nécessaire que p, alors p*

c'est-à-dire :

S'il est maintenant vrai et sera toujours vrai que p, alors p[10]

Ax 3. *S'il est nécessaire que p, alors il est nécessaire qu'il soit nécessaire que p*,

c'est-à-dire :

S'il est maintenant vrai et sera toujours vrai que p, alors il est maintenant vrai et sera toujours vrai qu'il est maintenant vrai et sera toujours vrai que p.

Or l'axiome qui, ajouté à la définition, à la règle et aux axiomes précédents de S4 suffit à donner S5 s'écrit :

Ax 4. $\Diamond \Box p \supset p$.

La lecture modale de cet axiome :

S'il est possible qu'il soit nécessaire que p, alors p

ne jouit peut-être pas d'une évidence indiscutable, mais elle ne heurte pas carrément notre intuition, ce qui n'est pas le cas de sa transposition diodorienne :

S'il est maintenant vrai ou sera vrai un jour qu'il est maintenant vrai et sera toujours vrai que p, alors p (= alors il est maintenant vrai que *p*).

De cette dernière proposition, il est facile de fournir un contre-exemple : je mourrai un jour ; ce jour-là *il sera vrai qu'il est maintenant* [11] *vrai et sera toujours vrai que je suis mort* ; par le fait même, aujourd'hui déjà, je dois admettre qu'*il est maintenant vrai ou sera vrai un jour qu'il est maintenant vrai et sera toujours vrai que je suis mort*. Or si la transposition diodorienne de Ax 4 était vraie, elle m'autoriserait à déduire de la proposition précédente que *je suis mort* déjà maintenant. » (Gardies, 1975, pp. 42-45).

[10] On notera au passage que la transposition diodorienne ne reste ici intuitive qu'à la condition d'interpréter le « *p* » de « alors *p* », non pas comme un intemporel, mais comme un présent. Ainsi devrait-on lire, pour éviter toute ambiguïté : « alors il est maintenant vrai que *p* » (…).

[11] Notons qu'il faut interpréter le *maintenant* comme renvoyant non pas au présent de mon discours actuel, mais à ce qui sera le présent de mon discours indirect, ce jour où il sera vrai, etc. De même on remarquera, dans l'exemple qui suit, que la logique même de notre propos nous amène à ne pas respecter la *concordance des temps*, lesquelles obéissent à des considérations qui ne sont pas nécessairement logiques.

3. Karl Popper, *La logique de la découverte scientifique*, 1978 [1934], trad. fr., Ph. Devaux & N. Thyssen-Rutten, Paris, Payot.

1. **Partie I : Introduction à la logique de la science – Chap. 1 : Examen de certains problèmes fondamentaux (extraits).**

« Le travail du savant consiste à avancer des théories et à les soumettre à des tests. Le stade initial, cet acte de concevoir ou d'inventer une théorie, ne me semble pas requérir une analyse logique ni même être susceptible d'en être l'objet.

La question de savoir comment une idée nouvelle peut naître dans l'esprit d'un homme – qu'il s'agisse d'un thème musical, d'un conflit dramatique ou d'une théorie scientifique – peut être d'un grand intérêt pour la psychologie empirique mais elle ne relève pas de l'analyse logique de la connaissance scientifique. Cette dernière se trouve concernée non par des *questions de fait* (le *quid facti* ? de Kant) mais seulement par des questions de justification ou de validité (le *quid juris* ? de Kant). Ces questions sont de l'espèce suivante : un énoncé peut-il être justifié ? S'il en est ainsi, comment ? Peut-on le soumettre à des tests ? Est-il logiquement sous la dépendance d'autres énoncés ? Ou encore, est-il en contradiction avec eux ? Pour qu'un énoncé puisse être examiné ainsi d'un point de vue logique, il doit auparavant nous avoir été soumis. Quelqu'un doit l'avoir formulé et soumis à un examen logique.

Je distinguerai donc soigneusement le processus de conception d'une nouvelle idée, des méthodes et résultats de son examen logique. En ce qui concerne la tâche de la logique de la connaissance – par opposition à la psychologie de la connaissance – j'affirmerai au départ qu'elle consiste seulement à examiner les méthodes nouvelles employées dans ces tests systématiques auxquels chaque idée nouvelle doit être soumise pour être prise au sérieux.

Certains pourraient objecter que ce serait davantage servir notre propos que de considérer comme la besogne de l'épistémologie le fait de procéder à ce qu'on a appelé une « reconstruction rationnelle » des étapes qui ont conduit le savant à une trouvaille, à la découverte d'une nouvelle vérité. Mais la question se pose : que désirons-nous précisément reconstruire ? S'il s'agit des processus impliqués dans la stimulation et le jaillissement d'une inspiration, je refuse de considérer leur reconstruction comme la tâche de la logique de la connaissance. De tels processus constituent l'objet de la psychologie empirique mais non celui de la logique. Le cas est différent si nous souhaitons reconstruire rationnellement les tests consécutifs à cette inspiration et grâce auxquels on peut découvrir qu'elle est une découverte ou connaître qu'elle est une connaissance. Dans la mesure où le savant émet un jugement critique, modifie ou rejette sa propre inspiration, nous pouvons, si nous le voulons, considérer l'analyse méthodologique entreprise ici comme une sorte de « reconstruction rationnelle » des processus de pensée correspondant à ces attitudes. Mais cette reconstruction ne doit pas décrire ces processus tels qu'ils se déroulent réellement ; elle ne peut donner que la charpente logique de la procédure de testabilité (*testing*). Mais c'est peut-être ce que veulent dire ceux qui parlent de « reconstruire rationnellement » nos modes d'acquisition de nos connaissances.

Il se trouve que les arguments présentés dans cet ouvrage sont tout à fait indépendants de ce problème. Cependant, j'estime à ce propos que la méthode logique ne se confond en rien avec le fait d'avoir de nouvelles idées ou de reconstruire logiquement ce processus (…).

Selon la conception que je vais exposer ici, la méthode qui consiste à mettre les théories à l'épreuve dans un esprit critique et à les sélectionner conformément aux résultats des tests, suit toujours la même démarche : en partant d'une idée nouvelle, avancée à titre d'essai et nullement justifiée à ce stade – et qui peut être une prévision, une hypothèse, un système théorique ou tout ce que vous voulez -, l'on tire par une déduction logique des conclusions. L'on compare alors ces conclusions les unes aux autres et à d'autres énoncés relatifs à la question de manière à trouver des relations logiques (telle l'équivalence, la déductibilité, la compatibilité ou l'incompatibilité) qui les unissent.

Nous pouvons, si nous voulons, distinguer quatre étapes différentes au cours desquelles pourraient être réalisée la mise à l'épreuve d'une théorie. Il y a, tout d'abord, la comparaison logique des conclusions entre elles par lesquelles on éprouve la cohérence interne du système. En deuxième lieu s'effectue la recherche de la forme logique de la théorie, qui a pour objet de déterminer si celle-ci a les caractéristiques d'une théorie empirique ou scientifique ou si elle est, par exemple, tautologique. Il y a, en troisième lieu, la comparaison de la théorie à d'autres théories, dans le but principal de déterminer si elle constituerait un progrès scientifique au cas où elle survivrait à nos divers tests. Enfin, la théorie est mise à l'épreuve en procédant à des applications empiriques des conclusions qui peuvent en être tirées. » (Popper, 1978, pp. 27-29)

4. Jaakko HINTIKKA, « Connaissance des fonctions et développement du savoir mathématique » [12]. Trad. fr D. Savatovsky

« Le développement du savoir mathématique peut être étudié sous différents aspects. L'aspect le plus fondamental de son étude concerne le *wie es eigentlich geschehen* : comment précisément les mathématiciens en sont venus à savoir ce qu'ils savent ? Les philosophes des mathématiques peuvent bien négliger cette histoire élémentaire, mais c'est à leurs risques et périls. Historiens et philosophes cherchent aussi à voir dans l'histoire des mathématiques davantage qu'une simple rhapsodie, la juxtaposition d'épisodes décousus. Mais ils doivent pour ce faire retracer l'horizon conceptuel sur le fond duquel travaillaient les mathématiciens de jadis ou de naguère.

Cet article repose sur l'idée directrice selon laquelle certains des traits les plus généraux du paysage conceptuel des mathématiques n'ont pas encore été correctement identifiés. S'agissant d'une histoire relativement récente, j'ai déjà examiné les plus stimulantes des nouvelles perspectives tracées dans le domaine des fondements des mathématiques (Hintikka 1995a et 1996). S'agissant d'une histoire plus ancienne, je suis convaincu qu'on peut faire appel à ce qui m'apparaît comme l'une des sources principales d'éclairage conceptuel : la logique des questions et réponses. Ce à quoi je vise ici, c'est à illustrer les possibilités offertes dans ce domaine à un travail de coopération entre philosophes des mathématiques (voire entre logiciens des mathématiques) et historiens des mathématiques. L'aspect novateur que paraît revêtir une telle approche tient à ce qu'une théorie logique adéquate de la connaissance, cette théorie des questions et réponses, est encore en chantier pour l'essentiel (Hintikka, Halonen & Mutanen, 2000).

Et puisqu'il faut commencer par le commencement, cet article prendra l'allure d'une poupée russe. Chacun des problèmes abordés recèle un problème plus profondément caché. Je commencerai par une question sans aucun lien apparent avec l'histoire ou la philosophie des mathématiques, à savoir : qu'est-ce qu'une réponse (une réponse concluante) à une question donnée ? De toute évidence, il s'agit là d'un problème central en logique et en sémantique des questions. Pourtant, je l'ai dit, une théorie logique et sémantique vraiment satisfaisante dans ce domaine n'en est qu'à ses premiers développements. Nul besoin de préciser qu'il n'est guère possible de rendre compte d'une théorie logique nouvelle dans le cadre restreint d'un article. Je tâcherai simplement d'exposer les notions principales de cette théorie en voie de constitution, à l'aide de quelques exemples. On en trouvera un aperçu plus ancien dans (Hintikka 1976), version demeurée inaboutie, et dans les mises à jour successives de cette première version (Hintikka 1992a ; Hintikka, Halonen & Mutanen, 2000).

Premier exemple : soit une question simple en "*qu-*" (*a simple wh-question*)[13]

(1) Who murdered Roger Ackroyd ?
[Qui a tué Roger Ackroyd ?]

Les propriétés logiques de cette question sont déterminées par son *desideratum*, qui spécifie ce que le questionneur cherche à savoir, c'est-à-dire de quelle sorte d'état de choses il cherche à être informé, dans des circonstances ordinaires. S'agissant de (1), le desideratum est

(2) I know who murdered Roger Ackroyd.
[Je sais qui a tué Roger Ackroyd.]

Dans les termes du langage épistémique, (2) peut être représenté par :

(3) $(\exists x)K_I M(x,r)$

où $(\exists x)$ est le quantificateur existentiel, K_I correspond à "je sais que" et $M(x,r)$ sténographie "x a tué Roger Ackroyd". Si l'on se sert d'une notation plus générale, (2) peut être représenté par

(4) $K_I (\exists x/K_I) M(x,r)$

où la barre oblique indique l'indépendance, au sens le plus ordinaire du mot. Dans les termes de ma sémantique des jeux (*game theoretical semantics*)[14], il s'agit là simplement de l'indépendance informationnelle, au sens générique en vigueur dans la théorie des jeux. Cette notion est suffisamment évidente par elle-même pour être comprise et évaluée sans appareil technique particulier.

[12] "Knowledge of Functions in the Growth of Mathematical Knowledge", in Emily Grosholtz & Herbert Breger (eds), *The Growth of Mathematical Knowledge*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht / London / Boston, 2000.

[13] La traduction de *wh-* par *qu-* peut faire problème et les traducteurs décident parfois de ne pas traduire (voir Rigal 1998, 9). En effet, *wh-* correspond à *who* / *whom* ("(à) Qui... ?"), *what* ("Qu'est-ce que... ?"), *when* ("Quand...?"), *which* (Quel...?), mais aussi à *where* ("Où... ?"), *why* ("Pourquoi... ?"), *whose* ("De qui... ?" / "A qui... ?") ou *whether* (introduisant la question indirecte : "... si... "). Dans la mesure où Hintikka ne traite, dans cet article, que des *questions simples* en *wh-* et pas des mots en *wh-* de façon générale (ainsi, *why* et *whether* ne sont pas concernés) et où il limite son analyse aux questions introduites par *who* et par *what*, il nous a paru possible ici de rendre *wh-* par *qu-* (NdT)

[14] Pour Hintikka, la sémantique des jeux trouve son fondement dans la théorie mathématique des jeux. C'est à cette spécificité que renvoie le *theoretical*, terme malaisé à traduire ("sémantique des jeux de type théorétique" ?). Les éditeurs et commentateurs retiennent le plus souvent l'expression *GTS*. (NdT)

Une réponse (*response*) à (1) prend normalement la forme de surface d'une phrase nominale comportant un nom singulier, par exemple un nom propre ou bien une description définie ou indéfinie. Soit *b* une phrase de ce type. Ce que cette réponse détermine alors, dans des conditions propices et normales, c'est la vérité de

(5) $K_I\, M(b,r)$

Parmi ces conditions normales, nous trouvons bien entendu la vérité de M(b,r), qui fait ici l'objet d'une assomption. J'appellerai (5) une *réplique* à la question dont le desideratum est (3) ou (4) — *b* étant ici une phrase nominale donnée en réponse à la question. Ce pourrait être, par exemple, "le médecin du village". Alors (5) dira la même chose que

(6) I know that the village doctor murdered Roger Ackroyd.
[Je sais que le médecin du village a tué Roger Ackroyd.]

Bien entendu, *b* peut être aussi un nom propre. Le fait décisif pour un logicien, quelle que soit la nature de la phrase nominale *b* comportant un nom au singulier (un terme singulier libre), c'est que (5) *n'implique pas logiquement* (3). En règle générale, la réplique à une question n'implique pas logiquement son desideratum. Dans le cas de (5) et de (3), la réplique (5) n'implique le desideratum (3) qu'à la condition de lui adjoindre cette prémisse supplémentaire :

(7) $(\exists\, x)K_I\,(b = x)$

qui peut aussi s'écrire

(8) $K_I\,(\exists\, x/K_I\,)(b = x)$

Dans l'exemple tiré d'Agatha Christie, (8) revient à dire : "je sais qui est le médecin du village". L'échec de (5) à entraîner (4) signifie que la réplique (5) n'est pas totalement satisfaisante à elle seule ou ne constitue pas ce que j'appelle une réponse *concluante* à la question dont le desideratum est (3). Car la visée de la réponse à une question, telle qu'elle est codifiée dans la sémantique des questions, c'est de rendre vrai son desideratum.

Je nomme *condition de conclusivité* (*conclusiveness condition*) la condition supplémentaire qui, adjointe à une réplique, rend le desideratum vrai. L'exigence d'une condition de conclusivité est un corollaire direct de la théorie sémantique logico-épistémique — ce dont nous ne rendrons pas compte ici. Elle participe également de notre compréhension ordinaire de la situation. Il est clair que (6), par exemple, ne garantit pas que je sache qui a tué Roger Ackroyd, à moins que je ne sache qui est le médecin du village. Il convient de noter que les conditions de conclusivité sont exigibles même dans le cas des noms propres, car je puis très bien ne pas savoir à qui ou à quoi renvoie tel nom propre.

En dépit du caractère d'évidence revêtu par le besoin de conditions de conclusivité, l'intérêt conceptuel de ces conditions réside dans certaines particularités, surtout lorsqu'on les compare aux répliques faites à des questions. Parmi ces particularités, on relèvera celles-ci :

(i) La connaissance exprimée par des répliques est une *connaissance de faits* (*knowledge of facts*) (il s'agit de propositions). La connaissance exprimée par une condition de conclusivité est en revanche une *connaissance d'objets* (d'entités), quel que soit son type logique, et dans le cas présent, une connaissance d'individus. Je reviendrai plus bas sur ce point.

(ii) La valeur de vérité des énoncés épistémiques (*epistemic statements*) du second type (*connaissance d'objets*) n'est pas entièrement déterminée par la valeur de vérité des propositions du premier type (*connaissance de faits*). En d'autres termes, les critères du *savoir qui* (*knowing who*) ou du *savoir quoi* (*knowing what*) ne sont pas entièrement déterminés par les critères du *savoir que* (*knowing that*). Cette propriété de la logique des deux notions nous est révélée par le fait que, dans notre usage effectif, nous faisons souvent varier nos critères implicites du *savoir qui* en adoptant des critères *ad hoc*. Une telle variation serait impossible si les critères de notre connaissance des entités étaient fixés par nos critères du *savoir que*. Je reviendrai plus bas sur ce point également.

(iii) La connaissance des entités est, pour une part au moins, conceptuelle par nature. Ainsi, si le *b* de (7) est un nom propre, alors la connaissance exprimée par (7) est en partie conceptuelle. Elle revient à savoir à qui renvoie le nom propre en question, ce qui constitue la part la plus importante de la signification d'un nom propre.

Ceci veut dire que pour obtenir une réponse à la question qu'il (elle) a posée — question du type (1) —, le (la) questionneur(euse) ("le" pouvant désigner un système intelligent) devra compter sur une certaine connaissance *a priori*. Cette connaissance doit être ou bien présupposée par celui qui répond comme étant préalablement accessible à celui qui questionne, ou bien communiquée au questionneur par son interlocuteur comme faisant partie de sa réponse, par dessus et au delà de sa réplique. Une telle connaissance *a priori*, en partie conceptuelle, doit être présupposée, lors même qu'il s'agit d'une séquence question-réponse dans laquelle la question est de type normal, c'est-à-dire purement factuelle. Insistons sur ce point. Nous avons affaire ici à un cas représentatif, quoique à petite échelle, d'un phénomène ignoré par les philosophes, qui relève des lois d'une logique épistémique bien comprise et présente un intérêt considérable, à savoir : le rôle joué par une connaissance *a priori* dans ce qui peut apparaître comme une connaissance factuelle ordinaire. A travers l'information qu'on obtient grâce à une simple question en *qu*-, c'est la connaissance *a priori* et conceptuelle (au sens large) du questionneur qui joue le rôle principal, et dans le cas qui nous occupe, la connaissance de ce à quoi réfèrent nos termes singuliers. Sans une connaissance de cette nature portant sur un terme singulier *b*, ce terme ne constitue pas, pour le (la) questionneur(euse), une réponse concluante à la question en *qu-* qu'il (ou elle) a soulevée.

J'ai déjà insisté, à de nombreuses reprises, sur l'interaction ou l'interdépendance de la connaissance factuelle et de la connaissance conceptuelle dans nos domaines de connaissance (ou d'information) constitués. La logique des questions-réponses nous offre à la fois des objets et des outils pour analyser cette interaction. En utilisant de tels outils, nous paraissons achopper assez vite, et de manière inattendue, sur l'imprécision de concepts que j'ai déjà pu étudier, notamment les notions de *savoir qui*, *savoir quoi*, etc. Il se trouve pourtant que cette apparente imprécision trouve une explication naturelle lorsqu'on adopte le point de vue que je propose : celui des questions-réponses. De fait, dans notre pratique linguistique et conceptuelle, *savoir qui est quelqu'un* peut avoir différentes significations qu'il n'est pas facile de classer et de lier les unes aux autres ; ce qu'il n'est d'ailleurs même pas nécessaire de faire, car la logique des questions-réponses est neutre relativement au choix des critères de connaissance des entités. Et dans la plupart des situations concrètes, nous n'avons aucune difficulté à deviner quels critères particuliers du *savoir qui* sont présupposés par le locuteur ou le scripteur. S'il devait jamais y avoir controverse quant aux critères du *savoir qui*, ce n'est pas un argument de type logique, mathématique ou philosophique qui permettrait de la résoudre une fois pour toutes. La solution ne peut être qu'une solution pragmatique.

Il est important de noter que cette sous-détermination sémantique du *savoir qui* et des expressions parallèles est profondément ancrée dans notre logique. Le fait décisif, ici, c'est que la valeur de vérité des énoncés avec *savoir que* ne préjuge pas de la valeur de vérité des énoncés avec *savoir qui*, *savoir quoi*, etc. De façon plus générale, les critères de notre connaissance des propositions ne déterminent pas complètement les critères de notre connaissance des objets. D'un point de vue sémantique, la raison fondamentale de cette sous-détermination est claire. Dans la connaissance propositionnelle (i.e : avec *savoir que*), l'interrogation porte simplement sur le point de savoir quels mondes possibles constituent des alternatives épistémiques (*epistemic alternatives*) au monde donné (*to a given world*) ou, en d'autres termes, quels scénarios sont compatibles avec ce qu'une personne sait. En revanche, la connaissance des objets ou des entités (parmi lesquelles il faut compter des personnes, bien entendu) dépend de surcroît de la manière dont on trace des lignes de mondes de *d'identification croisée* (*world lines of cross-identification*] entre les différents mondes possibles ou les différents scénarios tacitement admis.

Cette sous-détermination de la connaissance des objets par notre connaissance des propositions signifie, dans la pratique sémantique, que les critères du *savoir qui*, du *savoir quoi*, etc., peuvent faire l'objet de variations d'une circonstance à l'autre sans perturber les critères plus profondément enfouis du *savoir que*. Cela confère beaucoup d'incertitude *a priori* à ce que *savoir qui* peut signifier en ces différentes circonstances.

Il est important de bien comprendre que les critères du *savoir qui* doivent être entendus à chaque occasion particulière, et doivent l'être de façon absolument spécifique. Même lorsqu'un locuteur s'en remet à des critères inhabituels, ils peuvent (et doivent) être saisis par son interlocuteur en tant que tels. C'est ce qui se passe dans :

(9) Be nice to young girls. You never know who they will be.
[Soyez aimables avec les jeunes filles. On ne sait jamais qui elles deviendront.]

(10) Nobody knew who John McEnroe was before the 1977 Wimbledon.
[Personne ne savait qui était John McEnroe avant Wimbledon 1977.]

Ainsi, à chaque occasion d'utiliser le langage, la logique d'une construction avec *savoir* + *qu-* doit être assez subtile pour se trouver en conformité avec ce que l'on vient d'exposer.

Cette analyse peut être étendue aux questions relevant de tous les autres types logiques. J'indiquerai ici simplement comment elle s'applique aux questions expérimentales. Dans une question expérimentale des plus simples, l'expérimentateur se demande en effet comment une variable d'observation dépend d'une variable contrôlée, c'est-à-dire en quoi consiste leur interdépendance fonctionnelle. Si S[x,y] est une description de la relation entre ces deux variables dans un dispositif expérimental donné, le desideratum d'une question expérimentale simple prend alors la forme de

(11) $(\exists f)K_I(\forall x)S[x,f(x)]$.

Pour exposer les lois générales de la logique épistémique, il est utile de tenter d'exprimer des énoncés tels que (11) au niveau du premier ordre. Aussi surprenant que cela paraisse, on ne pourra pas l'exprimer de manière adéquate en ayant recours à la logique épistémique admise, mais seulement en ayant recours à ma notion d'indépendance. Si l'on utilise barre oblique en notation, (11) peut s'écrire

(12) $K_I(\forall x)(\exists f/K_I)S[x,y]$

Il convient de noter ici le caractère subtil du rapport dépendance / indépendance. Le quantificateur universel $(\forall x)$ dépend de K_I (ne serait-ce que pour l'ensemble d'individus qu'il parcourt). Le quantificateur existentiel $(\exists y)$ dépend de $(\forall x)$, mais pas de K_I.

Dans des cas plus complexes, ce n'est pas seulement le domaine des valeurs d'un quantificateur, mais aussi le choix vérifonctionnel effectif d'une valeur [*the actual truth-making choice of a value*] qui peut dépendre de l'opérateur épistémique initial K_I . L'énoncé de savoir qui en résulte alors se comporte comme une structure quantificatrice irréductible partiellement ordonnée. Nous pourrons ainsi avoir

(13) $K_I(\exists x)(\forall y)(\exists z/K_I)S[x,y,z]$

Il est même possible d'imaginer une expérimentation contrôlée où le desideratum d'une "question adressée à la nature" prend la forme de (13).

La réplique à une question expérimentale dont le desideratum est (11) ou (12) met en évidence la vérité d'un énoncé ayant la forme

(14) $K_I(\forall x)S[x,g(x)]$

pour une fonction particulière quelconque g. Dans les discussions philosophiques portant sur l'inférence scientifique, on a fait couler beaucoup d'encre pour tâcher de comprendre comment on en arrive à (14). Certes, il s'agit là d'un problème important mais, philosophiquement parlant, il relève au premier chef des techniques expérimentales, y compris de la précision observationnelle, de la théorie des erreurs, etc. Ce qui importe au premier chef dans une expérimentation, c'est un certain nombre d'observations particulières que nous pouvons songer à représenter par un graphe à x et à y coordonnées. Ce que nous procurent des expérimentations supplémentaires, faisant appel à des techniques de plus en plus fines, ce sont des points du même type, de plus en plus finement localisés.

Il est couramment admis que le passage de ces observations expérimentales particulières à la fonction g requiert une inférence spéciale, qu'on nomme inférence inductive. Une telle inférence est supposée permettre un saut à partir d'un nombre fini de points de mesure observés (*observed measurement-points*) vers le concept général incarné par la fonction g. Pourtant cette représentation est fausse. En accord avec la conception courante des mathématiques contemporaines, une fonction n'est qu'un certain type d'ensemble de paires ordonnées de valeurs-arguments (*argument-values*) et de valeurs-fonctions (*function-values*). Pour autant qu'on puisse faire abstraction de l'imprécision des observations expérimentales et de leur limitation en nombre, on peut dire qu'un dispositif expérimental nous fournira ce type de paires ordonnées en nombre toujours croissant. Il en résulte que le passage d'observations effectives à la fonction g n'est pas un saut inductif du particulier au général. Ce n'est qu'un passage à la limite vers la classe idéalisée de telles paires ordonnées. Ce passage à la limite dépend normalement de diverses assomptions, par exemple l'assomption de la continuité, mais il ne dépend pas de ce que les philosophes nomment règles ou principes d'induction. Sa possibilité est tenue pour admise dans nombre d'enquêtes expérimentales types.

Ces remarques placent de fait le concept d'induction sous un jour entièrement nouveau. Elles montrent en quoi le problème philosophique traditionnel de l'induction est largement non pertinent pour la pratique scientifique. Au lieu d'alléguer je ne sais quelle inférence inductive en partant de certaines données particulières, il faut prendre en compte deux processus distincts : d'une part, le passage à la limite conduisant d'un certain nombre d'observations expérimentales à une fonction extensionnellement définie ; d'autre part, la quête d'une fonction mathématique connue à même de capturer (*capture*) cette forme de dépendance fonctionnelle.

Ainsi, en n'ayant à justifier que d'un minimum d'abstraction, on peut dire qu'une expérimentation contrôlée représente en réalité une réplique de la forme (14). Mais le trait décisif de cette réplique est qu'il faut prendre la fonction g en son sens normal, purement extensionnel, comme "relation en extension", selon l'expression en vigueur. La principale caractéristique, ici requise, de telles fonctions est qu'elles sont d'ordinaire seulement partielles, restreintes à un seul parcours de valeurs $x_1<x<x_2$ de la variable contrôlée. Cette caractéristique particulière ne présente cependant pas d'intérêt pour l'objet de cet article, même si elle en présente un quand on discute du problème de l'induction. De fait, il apparaît qu'au sens premier du terme, un sens ancien et essentiel, l'induction renvoie au processus d'extension de ces généralisations partielles et à leur combinaison. Ce sens est prédominant jusqu'à Newton et on peut en suivre la trace en remontant à Aristote (voir Hintikka 1992b).

Répétons-le, le desideratum (le (11) ou le (12) de la question expérimentale) ne s'ensuit pas logiquement de la réplique (14), ce qui présente une analogie complète avec le cas des simples questions en *qu-*. (Cf. supra : (5) ne parvient pas à entraîner (3)). Pour que le savant expérimentaliste parvienne à une réponse concluante, il lui faut une prémisse additionnelle, qu'on peut écrire sous des formes différentes, mais équivalentes :

(15) $K_I(\forall x)(\exists y/K_I)(g(x)=y)$

(16) $K_I(\exists f/K_I)(\forall x)(g(x)=f(x))$

(17) $(\exists f)K_I(\forall x)(g(x)=f(x))$

(18) $(\exists f)K_I(g=f)$

(18) n'est ici qu'une paraphrase de (17). Si nous faisons figurer (18) ici, c'est à cause de son analogie avec la condition de conclusivité (7) qui lui correspond dans le domaine des questions en *qu-*. (Notons également le parallélisme entre (16) et (8).)

La formulation de la variante (17) présente un intérêt particulier pour le logicien parce qu'elle ne comporte aucune variable d'ordre supérieur ni aucun concept d'ordre supérieur (*higher-order*). Elle met ainsi en évidence le fait que la théorie de la logique épistémique ici requise ne s'embarrasse pas des problèmes épineux posés par les entités d'ordre supérieur, comme celui de l'existence des ensembles et autres problèmes similaires.

Bref, comme dans le cas des questions simples en *qu-*, un savant ne peut espérer obtenir une réponse concluante à une question expérimentale sans accéder à une condition de conclusivité de type (15) — (18). Mais que signifie cette condition ? Cette condition est satisfaite si et seulement si l'expérimentateur sait ce qu'est la fonction (la fonction-en-extension) g fournie par l'expérimentation, ce savoir ne lui étant pas fourni par l'expérimentation elle-même.

Nous pouvons percevoir ici une différence importante, d'ordre pragmatique, entre les questions expérimentales adressées à la nature et les questions simples en *qu-* adressées à un être humain. Dans le cas de l'être humain, l'attente conversationnelle (*conversational expectation*), c'est que le répondant fournisse une réponse telle qu'il (ou elle) sait que la condition de conclusivité est satisfaite, ou bien fournisse suffisamment d'informations collatérales (*collateral*), faisant partie de la totalité de la réponse, pour qu'elle le soit. Dans le cas des questions expérimentales, Mère Nature ne se soucie guère de ce que nous savons ou ne savons pas ; elle n'offre pas spontanément l'information supplémentaire qui permettrait de satisfaire la condition de conclusivité. Mais la différence entre les deux cas n'est pas d'ordre logique ; elle est d'ordre strictement pragmatique.

D'où la question : Quel type de connaissance une condition de conclusivité comme (18) codifie-t-elle ? Ce n'est plus une connaissance empirique, mais une connaissance purement mathématique, une connaissance des fonctions. A partir de là, la voie que j'ai suivie nous mène à cette conclusion inévitable : un scientifique a besoin d'un type de connaissance purement mathématique pour recevoir des réponses concluantes à ses questions expérimentales. Bref, la connaissance expérimentale dépend de la connaissance mathématique.

Ce résultat met vivement en lumière le rôle joué par la connaissance *a priori* dans notre connaissance empirique en général. Plus précisément, il constitue une étape importante lorsqu'on tente de comprendre le rôle que joue la connaissance mathématique dans la science. Un accroissement de la connaissance mathématique, résultant de l'aptitude d'un scientifique à connaître des fonctions en plus grand nombre, lui permettra de répondre à des questions expérimentales en plus grand nombre, en prenant l'expression *répondre à une question* dans son sens le plus strict et le plus littéral.

Dans la pratique scientifique et mathématique réelle, il y a une étape intermédiaire. Il est fréquent, et peut-être même typique, que ce qu'une expérimentation systématique procure à un scientifique, ce ne soit pas simplement les points d'une courbe (*graph points*), c'est-à-dire des paires de valeurs d'argument (variable contrôlée) et de valeurs de fonction (variable observée). Une expérimentation systématique peut bien plutôt présenter un ensemble de ces paires, assorties à l'observation du mode selon lequel une fonction change en un point donné, autrement dit la dérivée ou la dérivée partielle de cette fonction en ce point. Cela peut se produire même lorsque les diverses observations expérimentales dépendent d'un paramètre supplémentaire inconnu.

Dans ces cas-là, ce qu'une expérimentation présente au premier chef n'est pas une fonction en extension à un argument, mais quelque chose de plus complexe, par exemple une fonction en extension à deux arguments, c'est-à-dire des fonctions qui présentent la valeur des dérivées dy/dx comme une fonction ou x et y [??]. Même lorsqu'on découvre ce qu'est cette fonction, reste un problème supplémentaire : découvrir quelle est la fonction f attendue comme la solution de l'équation différentielle dy/dx = f(x,y). On peut aisément généraliser ces remarques. En règle générale, le passage d'une réplique expérimentale à une réponse mathématique implique dans tous ces cas la solution des équations différentielles. La connaissance conceptuelle requise par la science expérimentale implique ainsi également la connaissance des équations différentielles (partielles), et en particulier la connaissance de leurs solutions et des différentes méthodes pour y parvenir.

Ce n'est qu'en pratique que ce processus est plus complexe que la situation expérimentale simple d'où je suis parti. Aux yeux d'un philosophe porté sur la logique, ce type d'usage des équations différentielles durant l'enquête expérimentale n'est qu'une variante de la simple découverte expérimentale des dépendances fonctionnelles. Ainsi, nous avons en prime un aperçu des raisons pour lesquelles les équations différentielles jouent un rôle décisif dans la science expérimentale.

Avant de tirer de nouvelles conclusions de mes remarques, il convient d'examiner d'un peu plus près la portée précise du résultat selon lequel les réponses à des questions expérimentales présupposent une certaine connaissance conceptuelle (mathématique). Ce résultat peut paraître saisissant et pour ainsi dire paradoxal, comme thèse philosophique, mais virtuellement trivial, d'un point de vue logique. Si vous adressez une question en *qui* à un ami, lequel vous répond "N.N.", vous n'aurez pas satisfaction avant de savoir qui est ce "N.N.", c'est-à-dire quelle est la signification de ce nom. Si vous adressez une question expérimentale à la nature et que vous obtenez une fonction-en-extension comme réponse, autrement dit comme résultat de votre expérimentation, vous serez insatisfait tant que vous ne saurez pas de quelle fonction il s'agit, mathématiquement parlant. Les deux cas ne sont pas plus mystérieux l'un que l'autre.

Le besoin de savoir ce que sont, mathématiquement parlant, les modes de dépendance mis en évidence par une expérimentation, nous aide à comprendre le rôle des mathématiques dans le développement de la science expérimentale — et le rôle des besoins de la science expérimentale dans le développement des mathématiques. Dans l'histoire des mathématiques, il est souvent arrivé que la recherche expérimentale ait mis en évidence des fonctions qui n'étaient pas encore connues des mathématiciens. Parmi quantité d'exemples, je citerai celui-ci, pris presque au hasard :

Quand on a commencé à étudier les fonctions, au XVIII^{e} siècle, on les identifiait au moyen des formules qui les représentaient, — le plus souvent des séries infinies. Les exemples le plus communément traités conduisaient les mathématiciens à attendre des fonctions qu'elles soient relativement bien définies ; autrement dit qu'elles aient la propriété de valeur intermédiaire et qu'elles possèdent autant de dérivées que nécessaire. Mais ces attentes furent mises à mal vers le milieu du siècle quand apparut le besoin de prendre en compte des fonctions qui se présentaient elles-mêmes, non pas comme des expressions analytiques, mais comme des solutions aux équations différentielles partielles de la physique — des fonctions qui pouvaient n'être pas du tout représentées par des formules explicites. Dès lors que le concept de fonction était ainsi étendu, les mathématiciens durent décider lesquelles de ces fonctions dotées de telles propriétés pouvaient figurer comme des solutions aux équations différentielles (Grabiner 1981, 81-90).

Bien entendu, que la science expérimentale ait pu ainsi stimuler le développement des mathématiques n'est pas une révélation pour les historiens. Jusqu'ici, ce que j'ai tenté de montrer dans cet article, c'est que ce besoin d'accroître la connaissance mathématique en vue d'acquérir une nouvelle connaissance empirique (expérimentale) va bien au delà du simple avantage pragmatique, quand on décrit, quand on calcule, bref quand on maîtrise les dépendances fonctionnelles réciproques des différentes variables physiques. Il s'agit là aussi d'une application directe de la logique générale des questions aux questions expérimentales. Une application à peine plus complexe permet d'étendre la même approche à l'usage des équations différentielles (partielles) dans la découverte des dépendances fonctionnelles expérimentales.

Cela va sans dire, la notion d'expérimentation doit être entendue au sens large, sans être restreinte aux dispositifs spécialement construits par le scientifique et soumis à manipulations. L'idée fondamentale située au coeur de l'enquête empirique telle que nous l'entendons, n'est pas tant celle d'une interférence artificielle dans le cours normal de la nature, mais celle d'une étude des dépendances réciproques entre différentes variables physiques, en vue de déterminer leurs relations mathématiques réciproques. Que ces relations fassent l'objet d'un constat au travers d'expérimentations contrôlées (comme dans l'optique de Newton) ou bien à travers une série de ce que nous nommons ordinairement des observations (comme pour les lois de Kepler), peu nous importe ici. Un tel type d'étude a joué un rôle central dans la science du XVII^{e} siècle et dans la pensée mathématique propre à étayer cette science (voir Mahoney 1998). Dans la mesure où le terme (et la notion générale) de *fonction* n'étaient pas alors en vigueur, c'est à travers ce que les mathématiciens disaient des différentes espèces de courbes (et à travers ce qu'ils en faisaient) qu'on peut trouver les renseignements les plus fiables sur les aventures successives du concept de fonction. Descartes connaissait l'existence des courbes "mécaniques", résultant de considérations d'ordre cinématique (plus généralement physique), qui n'étaient donc pas d'ordre "mathématique" ni même "géométrique". A petite échelle, voilà qui présente clairement une analogie avec ce que je suggère : il existe un grand nombre de "fonctions arbitraires" qui ne sont pas "connues" des mathématiciens.

Certes, Descartes n'aurait pas admis la cycloïde parmi les courbes qu'il considérait comme géométriques, parce qu'il ne pouvait pas la décrire dans les termes d'une relation algébrique entre segments rectilignes (Mahoney 1998, Sect. 3).

Serait-ce aller trop loin que d'admettre que de telles "curiosités" aient pu jouer dans la pensée de Descartes un rôle analogue à celui des "monstres" construits par Dirichlet et par d'autres au XIX^{e} siècle? Dans les deux cas, l'aspect monstrueux de telles fonctions tient à ce qu'elles étaient imperméables aux méthodes familières des mathématiciens du temps ; s'agissant de Descartes, imperméables aux techniques algébriques et s'agissant de Dirichlet, aux techniques analytiques. A l'époque de Descartes, c'est la signification physique de certaines de ces courbes "mécaniques" qui incitait les mathématiciens à les étudier de plus près, en mettant au point des méthodes permettant de maîtriser leur comportement, c'est-à-dire, dans des termes qui sont les miens, de savoir quelles fonctions elles sont réellement.

Nous avons dans l'étude de la cycloïde entreprise par Huygens et analysée ici même par Michael Mahoney (Mahoney 1999, 17-39), un bel exemple de ce que j'avance. A maints égards, cette étude avait été suggérée à Huygens par sa "découverte capitale que le mouvement le long d'une cycloïde inversée est tautochronique" (Mahoney 1999, 23). Une telle découverte résolvait un problème alors d'actualité en cinématique, dû en partie au problème pratique posé par les mesures des temps et des longitudes. Ce type de progrès en mathématiques est en général traité sous la rubrique "extension du concept de fonction" (voir Youschkevitch 1976 et Bottazini 1986, chap. 1). Sans conteste, la genèse du concept général de fonction ("fonction arbitraire") forme l'un des chapitres les plus intéressants de histoire des mathématiques, d'un point de vue conceptuel et philosophique. Il nous faut cependant être parfaitement clair. Mes remarques conduisent de fait à une importante distinction. Nous devons distinguer d'une part ce qu'est une fonction arbitraire, telle qu'un mathématicien se la représente et telle que cette notion a pu se développer dans l'histoire des mathématiques, et d'autre part la question de savoir ce qu'on tient pour une fonction connue et lesquelles de ces fonctions étaient tenues pour telles à différents moments de l'histoire des mathématiques. Un mathématicien, ancien ou moderne, peut disposer, pour toutes sortes de visées pratiques, d'une notion claire de ce qu'est une fonction et limiter cependant son intérêt à une toute petite classe de fonctions particulières. On nous donne parfois par euphémisme les raisons pour lesquelles les mathématiciens écartent les autres fonctions (celles qui ne sont pas connues) : ces fonctions "ne possède(raie)nt aucune propriété commune, quelle qu'elle soit" (Youschkevitch 1976, 81). Même si cet article n'a pas pour objet d'entrer en détail dans l'histoire des mathématiques, il est manifeste et très remarquable que le concept de fonction arbitraire était implicitement contenu dans le travail des mathématiciens et parfois même explicitement formulé (au moins pour ce qui touche aux fonctions continues) bien avant le moment où les mathématiciens ont thématisé sérieusement la notion générale de fonction. Au vu des témoignages historiques, mais aussi des aperçus systématiques ici proposés, l'histoire du concept de fonction apparaît moins comme une extension de la notion générale que comme une expansion de la classe des fonctions que les mathématiciens peuvent effectivement maîtriser, la tenant par là pour connue d'eux.

Les exemples historiques que nous avons donnés s'accordent tout-à-fait avec ce point de vue. Quand une expérimentation physique met en lumière la dépendance de deux variables, le physicien ne se demande pas si la fonction qui codifie cette dépendance existe réellement. Elle existe, de toute évidence, puisqu'elle a été instanciée dans la nature. Descartes, lui aussi, était très au fait de l'existence des courbes purement mécaniques. L'ennui, c'est qu'il ne pouvait pas les maîtriser grâce aux techniques mathématiques (essentiellement algébriques) dont il disposait. Même si les mathématiciens d'avant Euler ne possédaient pas la notion pleine et entière de fonction arbitraire, ils tenaient sans nul doute ce qu'ils faisaient pour un élargissement du domaine des fonctions connues plutôt que pour une extension des fonctions réputées existantes.

Les questions expérimentales ont joué un rôle crucial dans ce développement. Certes, la logique des expérimentations contrôlées (au sens strict) n'est pas seule en cause : il en va plus largement de l'étude empirique des dépendances fonctionnelles entre variables. La logique des questions portant sur la dépendance fonctionnelle est la même lorsqu'il s'agit de dépendances constatées par observation plutôt que par expérimentation.

Les deux processus que j'ai distingués, la reconnaissance progressive du concept général de fonction "arbitraire" et l'élargissement de la classe des fonctions mathématiquement maîtrisées sont bien entendu liés d'un point de vue historique. A maintes reprises, des fonctions qui avaient été en effet introduites comme répliques à des questions expérimentales se sont révélées ne pas faire partie des fonctions telles qu'elles étaient jusqu'alors envisagées. Ces nouvelles fonctions eurent un rôle instrumental dans la mesure où elles attiraient l'attention des mathématiciens sur une notion de fonction au domaine plus large que celle des fonctions prises en compte jusqu'alors, où elles donnaient chair à un concept squelettique et où, parfois même, elles étendaient littéralement le concept des fonctions reconnues par les mathématiciens dans leur travail. A des fins de clarté conceptuelle, il n'en faut pas moins, quant au principe, bien distinguer les deux choses : la genèse de la notion de fonction arbitraire et l'élargissement du domaine des fonctions connues.

Il est tout à fait remarquable qu'en contribuant au développement de l'idée de fonction arbitraire (classe de paires ordonnées de valeurs d'arguments et de valeurs de fonctions), les questions expérimentales aient pu attirer l'attention des mathématiciens sur de nouvelles fonctions à forme extensive ne participant pas d'une représentation analytique ou plus généralement mathématique. On dira peut-être ici que je ne mets pas en pratique ce que je prône. La notion de fonction dont l'identité est connue de tel ou tel mathématicien semble demeurer obscure à tout jamais. Et ce n'est pas seulement parce que les mathématiciens ne s'en sont pas servi effectivement, mais il ne paraît pas y avoir de moyen commode pour décider, même en principe, lesquelles des fonctions sont connues par quels mathématiciens et lesquelles ne le sont pas. Ce que nous avons dit jusqu'ici peut nous aider à clarifier la situation. Il faut à cette fin examiner de plus près la nature de la connaissance comprise dans les conditions de conclusivité telles que (15) — (18). En un sens, la réponse même à cette question est triviale. Pour la notion de connaissance, la seule façon de se manifester en (15) — (18) est de prendre la forme de l'opérateur K *savoir que*. Ce qui est inclus dans notre connaissance des fonctions n'est qu'une variété de ce que nous entendons par connaissance en général.

Mais en un sens différent, relatif aux effets réciproques entre la notion de connaissance et d'autres concepts, la connaissance comprise dans les conditions de conclusivité des questions présente néanmoins d'intéressantes particularités. Les desiderata des questions non-réitérées prennent la forme générale $K_I S$ où l'élément porteur de question (*the question element*) inscrit S sous la forme des quantificateurs à barres obliques et des connecteurs ($\exists x/K_I$) et (v/K_I). (En admettant, en d'autres termes, que S est une formule ordinaire du premier ordre apparaissant normalement sous la forme d'une négation (*in a negation normal form*). Toutes les fois que nous trouvons des composantes de questions appartenant au premier type ($\exists x/K_I$), nous avons affaire à une *connaissance d'objets* (d'entités) et pas seulement à une *connaissance de propositions* (de faits). On a vu que cette distinction était opératoire même pour les questions simples en *qu-*. Nous pouvons voir ici que la connaissance conceptuelle comprise dans la connaissance empirique d'un scientifique expérimentaliste est une connaissance d'objets mathématiques, c'est-à-dire, dans le cas le plus simple, de fonctions mathématiques.

Nous avons déjà noté, s'agissant des questions simples en *qu-*, que les critères de notre connaissance des objets sont sous-déterminés par les critères de notre connaissance des propositions. Il en résulte un certain flou en pratique. Rapportée à notre connaissance d'objets mathématiques comme les fonctions, la morale de cette histoire pragmatique importe à la fois au philosophe et à l'historien des mathématiques. Un historien ne peut pas disposer d'un concept très précis pour une fonction connue ; il ne peut donc pas donner de réponse précise à la question de savoir quelles fonctions étaient connues des mathématiciens à différentes époques dans l'histoire de l'humanité. Pour autant, cela ne rend pas le concept de connaissance des fonctions inutile pour l'historien ; et cela n'entraîne pas non plus nécessairement de désaccords quant aux questions spécifiques touchant au domaine des fonctions effectivement connues des mathématiciens à différents moments du développement des mathématiques. La notion de connaissance des fonctions mathématiques ne s'en trouve pas plus mal lotie et n'en devient pas plus inutile que la notion de savoir-qui-est-quelqu'un, dont l'absence, en dépit de son instabilité sémantique, rendrait impossible toute vie sociale. Je crois que la notion de connaissance des fonctions mathématiques est pareillement indispensable aux historiens des mathématiques.

L'autre morale de cette histoire touche aux désaccords sur ce qu'il faut compter parmi les fonctions connues (Hintikka 1996, chap. 10). Il peut y avoir, et il y a eu de fait, une très grande variété de réponses à cette question : je l'ai montré ailleurs. Savoir quelle fonction tel mode de dépendance revêt en pratique, revient à maîtriser conceptuellement le comportement de cette fonction. Mais que requiert une telle maîtrise ? On peut avoir la tentation d'exiger de cette fonction qu'elle soit calculable (récursive). Que pourrait bien signifier, en effet, maîtriser réellement une fonction, si ce n'est être à même d'en calculer les valeurs ? Aussi plausible qu'elle paraisse au premier coup d'oeil, cette réponse ne fait pas l'unanimité parmi les mathématiciens. On peut faire valoir qu'il y a de nombreuses manières plus subtiles de maîtriser une fonction : connaître son comportement qualitatif, par exemple, en y incluant ses limites supérieure et inférieure, ou bien connaître ses valeurs asymptotiques, voire, peut-être, être en mesure d'en calculer la valeur pour un grand nombre de valeurs d'arguments, et ainsi de suite. Je crains qu'on ne puisse faire un choix réaliste parmi les différentes explications possibles de l'idée de fonction connue à partir seulement de fondements philosophiques. Le choix doit être partiellement pragmatique. Du reste, comme dans le cas des critères du *savoir qui*, il peut parfaitement advenir qu'en des occasions différentes, il faille adopter des critères différents lorsqu'on entreprend de connaître ce qu'est une fonction donnée, sans craindre d'y perdre en intelligibilité.

Voilà qui peut être utile pour inscrire les conflits entre les différentes écoles de pensée en philosophie des mathématiques dans une perspective critique. On peut dire, sous réserve d'inventaire (voir plus bas), qu'identifier fonctions connues et fonctions calculables est une approche des fondements des mathématiques propre au constructivisme. Mais les pères fondateurs de l'intuitionnisme se servaient de critères différents, beaucoup plus ouvertement épistémologiques, pour déterminer la connaissance des fonctions (voir Hintikka 1996, chap. 11). C'est tout à fait clair chez Brouwer et ses successeurs, quand ils utilisent la technique des contre-exemples épistémologiques.

Tout ce qui précède repose sur une hypothèse relevant à la fois de la philosophie des mathématiques et d'un cadre conceptuel approprié à l'histoire des mathématiques. J'ai postulé que des doctrines telles que l'intuitionnisme pouvaient être comprises comme ayant trait à ce qui est ou n'est pas connu en mathématiques. Cette hypothèse est-elle fondée ? Il est clair que les conceptions des intuitionnistes authentiques se sont organisées autour d'un noyau épistémologique solide. Mais il est aussi clair que ce noyau épistémologique n'est directement relatif qu'à notre connaissance des *objets* mathématiques, pas à notre connaissance des *propositions* mathématiques. Pour montrer que je sais que telle *proposition* mathématique est vraie, il est nécessaire et suffisant à mes yeux de prouver d'abord cette proposition. Ce n'est que si nous avons affaire à la connaissance d'*objets* mathématiques, que l'approche épistémique présente une différence à cet égard. Certes, il est souvent arrivé aux intuitionnistes de réinterpréter tacitement les propositions classiques et d'en faire des énoncés portant sur notre connaissance des objets mathématiques. Et ceci, le plus souvent, dans un but polémique. Cette pratique a malheureusement entraîné beaucoup de confusions inutiles. Elle est démentie à maints égards par divers résultats montrant comment il est possible de reformuler la logique classique dans le cadre d'une logique intuitionniste.

Prenons pour exemple l'axiome de choix. Entre autres formulations, il peut épouser ce schéma

(19) $(\forall x)(\exists y)S[x,y] \times (\exists f)(\forall x)S[x,f(x)]$

Dans toute approche raisonnable en logique épistémique, l'implication correspondante vaut pour la connaissance mathématique :

(20) $K(\forall x)(\exists y)S[x,y] \times K(\exists f)(\forall x)S[x,f(x)]$

J'ai déjà montré que, même lorsqu'on adopte une interprétation constructiviste des quantificateurs, (19) peut parfaitement exprimer cette interprétation, à condition de restreindre convenablement les valeurs du quantificateur de fonction $(\exists f)$. Ceci s'accorde avec la position des intuitionnistes actuels, comme Michael Dummett, qui admettent effectivement l'axiome de choix et doivent aussi admettre par conséquent, pour le langage ordinaire comme pour le raisonnement déductif (*verbally and deductively*), un axiome tel que l'axiome (19).

Pour mettre en œuvrer une critique de l'axiome de choix, nous devons nous pencher sur ce que les mathématiciens savent des objets mathématiques, c'est-à-dire, ici, de la fonction de choix. Il est exigible que la fonction de choix f, non seulement existe, mais aussi soit connue. La critique de l'intuitionnisme doit prendre pour véritable cible non pas la validité de (19) ou de (20), mais celle de

(21) $K(\forall x)(\exists y)S[x,y] \square K(\exists f)(\forall x)S[x,f(x)]$

ou en d'autres termes (avec d'autres symboles), la validité de

(22) $K(\forall x)(\exists y)S[x,y] \rightarrow K(\exists f/K)(\forall x)S[x,f(x)]$

ou bien, en termes de calcul du premier ordre, la validité de

(23) $K(\forall x)(\exists y)S[x,y] \rightarrow K(\forall x)(\exists y/K)S[x,y]$.

Voilà qui nous donne à maints égards une explication correcte des intuitions des intuitionnistes. Les intuitionnistes ont raison : les conditionnelles (22) — (23) ne sont pas valides en logique épistémique, bien que (19) — (20) le soient. Mais que les intuitionnistes aient raison ne signifie pas que les mathématiciens classiques aient tort. Tout ce que cela signifie, c'est que les discussions qu'ils ont eues reposaient sur un malentendu. La similarité des conséquences des trois conditionnelles (20), (21) et (22), ajoutée au fait que les intuitionnistes ne sont pas parvenus à expliciter le rôle du concept de connaissance, permet de comprendre pourquoi la confusion entre (20) et (21) ait à ce point prévalu.

L'on peut aussi indiquer en termes généraux ce qui distingue les intuitionnistes des mathématiciens classiques. Si nous appliquons les définitions formulées plus haut à (20) — (23), il apparaît que le second membre de (23) représente la connaissance d'objets, tandis que la formule (20) tout entière représente la connaissance de faits (propositions). Ce qui intéresse ainsi au premier chef les mathématiciens classiques est notre connaissance des faits mathématiques. Les faits d'existence sont à leurs yeux des faits comme les autres, comme le dit Hadamard en justifiant l'axiome de choix (Baire et al. 1905, 270). Les intuitionnistes, en revanche, s'intéressent d'abord à notre connaissance des objets mathématiques.

Cet exemple illustre l'usage que l'on peut faire de mes concepts pour résoudre des problèmes propres aux fondements des mathématiques. Cet usage repose sur une hypothèse qu'on recevra d'autant mieux en sa créance que mes approches réussiront mieux à s'appliquer. Maints philosophes préféreraient analyser les problèmes que j'aborde comme touchant à l'existence mathématique, autrement dit, comme des problèmes d'ontologie des mathématiques. L'axiome de choix, par exemple, est ordinairement formulé en termes d'existence d'une fonction de choix plutôt qu'en termes de savoir.

Je crois que cette approche ontologique de problèmes fondationnels, comme l'axiome de choix, est erronée. Ou plutôt, je crois que la validité de l'axiome de choix est triviale et ne vaut pas la peine d'être abordée comme une question ontologique,. Des conditionnelles comme (20) révèlent simplement ce que signifient des quantificateurs liés. Que l'on ne soit pas parvenu à le reconnaître comme une évidence tient à ce qu'on a tenté à tort d'aborder la théorie des ensembles comme une théorie du premier ordre. Ces tentatives ouvrent la porte à des modèles non-standards inattendus dans lesquels l'axiome de choix (dénaturé) se révèle faux. Mais ce problème concerne la théorie des ensembles, pas l'axiome de choix.

Pour comprendre l'apparente controverse concernant l'axiome de choix, il nous faut apprécier le rôle tacite, mais crucial, joué par les notions épistémiques en jeu. L'apport décisif, mais largement tacite, des intuitionnistes a été de faire porter les questions épistémologiques sur la connaissance mathématique. Malheureusement les intuitionnistes eux-mêmes ne sont pas parvenus à déployer leur nouvelle approche, ni à réaliser à quel point ce dont ils parlaient pouvait différer de ce dont parlaient les mathématiciens classiques. Seule la distinction entre connaissance des vérités mathématiques et connaissance des objets mathématiques nous permet de saisir leurs idées dans toute leur nouveauté et d'en comprendre la véritable nature. En même temps, l'étude de l'histoire des mathématiques, notamment l'histoire du concept de fonction, est susceptible de montrer que cette dimension épistémique — plus précisément, le rôle joué par notre connaissance des objets mathématiques en tant qu'on les distingue des vérités mathématiques — a eu également un rôle important, quoique tacite, lors des premières étapes du développement de la connaissance mathématique.

Je ne dispose cependant d'aucun argument imbattable permettant de démontrer une fois pour toutes que l'approche ontologique des problèmes fondationnels est erronée. Et les arguments systématiques que je puis mobiliser ne figurent pas dans cet article. L'histoire des mathématiques fournit néanmoins un renfort indirect à l'approche épistémologique. Tout succès des analyses issues de ma théorie des questions contribuera à renforcer l'approche épistémologique. En règle générale, on ne peut guère espérer comprendre la dynamique de développement du concept de fonction ou d'élargissement de la classe des fonctions dont traitent les mathématiciens, en y voyant l'invention par les mathématiciens de fonctions nouvelles, sans existence préalable, voire l'extension du concept de fonction. Les fonctions que les mathématiciens n'avaient pas prises en compte jusque là leur ont été imposées par le développement des sciences naturelles ou d'autres domaines de la vie et de la science. En forçant les mathématiciens à élargir ainsi leur connaissance des objets mathématiques, les expérimentations ont joué un rôle dont l'intérêt est d'offrir un exemple instructif et précis des influences réciproques entre sciences et mathématiques. J'ai tâché de montrer dans cet article comment de telles influences pouvaient être analysés d'un point de vue épistémologique. »

5. Sylvain Auroux, *La raison le langage et les normes*, Paris, PUF, 1998.

Le structurel et l'onto-historique

« Le second problème ontologique que nous souhaitons discuter est tout aussi délicat [que celui de la définition ontologique de l'objet empirique], mais il pourra donner lieu à des conceptions plus stables, parce que nous pourrons l'aborder de façon plus globale. Commençons par accepter le prototype fourni par la physique mathématique newtonienne. Il est clair que cette discipline peut se projeter dans le tétraèdre de validation aux environs du sommet 3 : la physique est le modèle même de la science nomologique et hypothético-déductive. Ordinairement l'ontologie correspondant à cet état de fait peut se résumer de la façon suivante : les lois de la nature expriment des relations fixes entre des entités (les corps) qui restent éternellement identiques à elles-mêmes. En d'autres mots, la nature est éternelle, ce qui correspond bien à la définition spinoziste de la substance. Le temps est une variable qui figure dans les équations des physiciens, il n'y a aucune raison de le considérer comme une propriété intrinsèque à la nature elle-même. Comme disait Kant, ce n'est pas le temps qui s'écoule, c'est l'existence de ce qui est qui s'écoule dans le temps. Einstein, bien qu'il ait eu une conception totalement différente de la temporalité, conservera cette idée d'une nature (un univers) intangible en son être. Les lois de la nature valent en tout temps et en tout lieu, elles sont insensibles au contexte spatio-temporel. Or, dès le début du XIX^e^ siècle, commencent à prendre de l'importance des disciplines qui supposent une tout autre structure ontologique relativement à la temporalité. On en énumèrera facilement quelques unes :

- cosmologie ;
- théorie de la terre, explication des reliefs (ultérieurement, dérive des continents), géologie ;
- paléontologie ;
- théorie de l'évolution ;
- classification généalogique des langues.

Dans une théorie cosmologique ou dans une classification généalogique des langues, nous ordonnons des étapes d'un développement. Ces étapes sont datées et localisées. Le temps (ou l'espace) n'est pas pour elles une simple variable comme il l'est dans les équations de la mécanique. Il est un moyen d'identification et, par là, quelque chose d'interne à l'état considéré. On peut traduire cela en disant que chaque état est unique, sinon en droit, du moins en fait et nous l'étudions comme tel[15]. Certaines conséquences de cette situation ont été parfaitement aperçues par Cournot, quoique dans un autre contexte[16] :

> Il s'est écoulé dans le passé une multitude de faits que leur nature soustrait essentiellement à toute investigation théorique fondée sur la constatation des faits actuels et sur la connaissance des lois permanentes et qui dès lors ne peuvent être connus qu'historiquement […] (*Essai sur les fondements de nos connaissances et les caractères de la critique philosophique*, 1851, § 302).

Cela revient à dire que les disciplines en question se projettent dans le tétraèdre disciplinaire sur le sommet des disciplines historiques et non sur le sommet correspondant aux disciplines nomologiques. Nous discutons de l'ontologie et non des techniques de validation ; par conséquent, la propriété que nous venons de mettre au jour ne dépend pas des techniques de validation. Si nous voulons à partir de cette propriété définir un type disciplinaire, nous pouvons lui donner le nom d'*onto-historique*[17]. La classe des sciences historiques (critériologie provenant de la validation) ne se confond pas avec la classe des sciences onto-historiques (critériologie ontologique) : une monographie sur les escargots d'eau douce ou les formes du génitif hittite (…) appartiennent aux sciences historiques telles que nous les avons définies, certainement pas aux disciplines onto-historiques. Ce qui distingue ces dernières, c'est un rapport particulier à la temporalité.

On notera qu'à partir du XIX^e^ siècle la pratique commune a tendu à réserver le terme d'histoire (sauf dans l'expression *histoire naturelle* qui était encore en usage vers le milieu du XX^e^ siècle) à une discipline onto-historique concernant le devenir de certains types d'actions humaines. Cela a eu pour conséquence néfaste de permettre la construction par les philosophes (depuis l'idéalisme allemand jusqu'à Heidegger) d'une conception ontologique de l'histoire reposant sur le déploiement d'une temporalité propre au sujet humain. Or s'il est indéniable qu'existe une temporalité intersubjective propre aux actions de l'homme, l'un des apports philosophiques les plus importants du développement scientifique du XX^e^ siècle est de nous amener à comprendre que l'onto-historique n'est pas le propre de l'humanité et de la culture.

---

[15] (…)
[16] (…)
[17] (…)

On peut être réservé sur l'expression théorie de l'évolution ; on pourrait, par exemple, soutenir qu'il ne s'agit pas d'une théorie, mais d'un fait, d'une immense proposition particulière composée par la conjonction d'une grande quantité de faits élémentaires. Nous avons en effet l'habitude de nommer 'théories' des ensembles de propositions universelles de type nomologique (par ex. la théorie newtonienne des forces centrales). Qu'est-ce que la théorie de l'évolution ? Globalement, on peut la caractériser comme une sorte de tableau (comme on disait au XVIII^e siècle) ou de *scénario* (comme on dirait aujourd'hui) qui présente chronologiquement l'enchaînement des différentes espèces dont nous avons pu retrouver des traces. A cela s'ajoutent différentes conceptions des mécanismes par lesquels les espèces disparaissent ou apparaissent. La mise en place du tableau ou du scénario correspond à des hypothèses et à des déductions à partir d'éléments factuels comme les fossiles, le rapport de leurs formes et celui de leurs différentes situations dans les couches sédimentaires, etc. La théorie de l'évolution n'est pas nomologique parce que les éléments mis en place dans le tableau ne sont pas récurrents. Mais elle n'est pas non plus un fait, parce qu'elle est une construction hypothétique qui doit être validée par des quantités de faits appartenant à des ordres différents. Elle est bien une théorie, au sens où nous disons qu'un inspecteur de police qui, à partir d'indices dont il dispose, reconstitue hypothétiquement un vol ou un meurtre qu'il a sa théorie sur la question. Mais il n'y a aucune raison de penser que ce sens-là du mot théorie est moins noble ou moins important que l'autre. Nous envisageons la tectonique des plaques comme une théorie, nous parlons – à juste titre – de la *théorie* des coefficients sonantiques ou des laryngales[18], voire même, par exemple, d'une théorie de la racine indo-européenne[19]. Ces théories par leur mode de validation ressemblent aux théories nomologiques, mais leurs objets ne sont pas récurrents et elles ne sont pas universelles (elles sont *globales*). Sur l'arête 2-3 du tétraèdre, elles sont à égale distance des disciplines historiques et des disciplines nomologiques.

L'existence de disciplines onto-historiques – quand bien même leur émergence massive au XIX^e siècle a posé le problème philosophique de l'historicisme[20] – ne provoque pas nécessairement de bouleversement dans notre conception du monde ou celle des sciences. La cosmologie de Laplace ne change rien à la représentation de la nature et de ses lois fixes et éternelles que nous fournissait la mécanique newtonienne. On comprend la conception de Cournot qui, conservant le sens ancien du mot « histoire » que nous avons utilisé pour définir les types disciplinaires, divise toute étude d'un domaine d'objets en une partie « scientifique » et une partie « historique ». Il applique cette bipartition aux sciences du langage :

> Dans les langues, la structure grammaticale est l'objet d'une théorie vraiment scientifique ; à part quelques irrégularités qu'il faut imputer au caprice de l'oreille ou de l'usage, le raisonnement, l'analogie rendent compte des lois et des formes syntaxiques ; tandis que la composition des mots et des liens de parenté des idiomes ne peuvent en général s'expliquer que par des précédents historiques. (*op. cit*., p. 366)

Or, la chose ne va pas soi[21]. Le fameux programme du néogrammairien H. Paul – la science du langage est l'histoire du langage – revient à contester une telle bipartition et à proposer une primauté de l'onto-historique. Que peut bien signifier cette primauté ?

Une discipline nomologique du point de vue de la validation – considérons que la grammaire en est une – correspond à ce que nous pouvons nommer, en prenant un point de vue ontologique, une *discipline structurelle*. Supposons un domaine d'entités O_i (ce pourrait être une langue naturelle) qui fasse l'objet d'une approche onto-historique D_h (ce pourrait être la grammaire comparée et historique) et une approche structurelle D_s (la grammaire). Dans D_h nous avons des faits $f_1,\ldots, f_n$, identifiés sur une échelle chronologique $T_1,\ldots,T_n$. Dans D_h nous avons des lois $L_1,\ldots,L_2$. Ces lois peuvent utiliser une variable

---

[18] (…)

[19] Cf. E. Benveniste, *Origines de la formation des noms en indo-européen* (…), 1935 (…), p. 147-173. Il s'agit de restituer la structure phonologique des thèmes radicaux indo-européens.

[20] Au XIX^e siècle, on entend par historicisme (particulièrement en Allemagne) différentes conceptions (en général héritées de Hegel) qui, toutes, font de l'histoire l'élément essentiel de la compréhension et de l'explication des phénomènes humains. De là vient l'idée que l'historicisme est un relativisme. Popper (*Poverty of Historicism*, 1944) a donné au concept une acception légèrement différente : il s'agit, dans les sciences sociales, de toute théorie qui se donne pour but la prédictibilité historique. Dans la terminologie développée ici, l'historicisme revient à accorder aux disciplines onto-historiques un privilège sur les disciplines structurelles ; il n'implique en rien l'historicisme au sens de Popper.

[21] Pour simplifier, je laisse de côté le fait que pour de nombreux linguistes de l'époque la répartition des traits disciplinaires était exactement l'inverse de celle proposée par Cournot. Ainsi pour A. Schleicher la grammaire est-elle conventionnelle et contingente (historique), tandis que seule l'étude génétique des langues est une véritable science établissant des lois (il s'agit pour lui d'une science naturelle). On notera que cette attitude correspond à deux choses : i) une confusion sur le terme loi (…) et ii) l'idée (caractéristique de la grammaire comparée) que le premier critère de la scientificité est de concerner des faits (…).

temporelle, t. La grammaire ne le fait généralement pas[22], ce que l'on peut résumer en disant que pour elle la temporalité n'est jamais pertinente, état de fait qui n'est toutefois pas d'une interprétation facile[23].

Lorsque nous donnons une valeur à la variable t que l'on rencontre dans une loi et, disons, à T_i, nous sommes généralement capables de positionner ces valeurs sur une même échelle de temps universel. Ce fait possède (probablement) une signification ontologique profonde, mais rien n'est moins évident : l'échelle universelle de temps pourrait être un artifice commode qui masque une totale disparité ontologique. En tout état de cause, lorsque nous utilisons des lois, nous ne nous préoccupons guère des rapports entre les valeurs de t et celle de T_i. De la même façon, lorsque nous étudions un cas qui tombe sous une loi (notamment, un exemple pour une règle grammaticale), nous ne nous préoccupons généralement pas de dater ce cas[24]. Il y a pourtant un type de cas où nous rapprochons la variable t de la loi ou de la date du cas observé avec T_i et ce type de cas est essentiel pour les rapports entre D_h et D_s. Prenons des exemples.

Les verbes du haut et moyen anglais tels que *sculan, willan, magan, cunnan, motan* sont traduits en anglais moderne par les verbes modaux auxquels ils ont donné naissance (*shall, will, may, can, must*). Or, les verbes en question du haut et moyen anglais se comportent comme tous les autres verbes (mêmes paradigmes relativement aux personnes, même traitement pour la négation et l'interrogation). Ce n'est pas le cas pour leurs correspondants modernes (pas de forme de troisième personne, pas d'auxiliaire *do* pour la négation et l'interrogation). Appelons L_1 et L_2 les « lois »[25] qui s'appliquent, respectivement, dans les deux cas. Ces lois ne comportent pas de variable temporelle, et nous n'aurions pas de raison de les relier à une quelconque représentation de la temporalité s'il n'existait pas dans l'histoire de l'anglais un temps T_i qui constitue une limite en deçà et au-delà de laquelle les mêmes lois ne s'appliquent pas.

(…)

Le cas le plus frappant est sans doute fourni par les rapports de la physique quantique et de la cosmologie moderne. On sait que la physique des particules distingue plusieurs forces d'interaction : interaction forte (cohésion du noyau de l'atome), interaction faible (responsable de la radioactivité naturelle), interaction électromagnétique (cohésion de l'atome) et gravitation (à laquelle participent toutes les particules). Dans le style ontologique structurel de la physique classique, on aurait tout simplement quatre types d'entités (d'autant que chaque interaction correspond à des particules, les différents bosons) et aucun espoir d'unifier leurs théories. Il n'en va pas de même de la physique contemporaine où l'unification passe par la cosmologie :

> Les observations que nous faisons sont inscrites temporellement dans l'histoire de l'univers. La température de notre univers, en expansion depuis quinze milliards d'années est très basse (2,7 k). Mais il n'en pas toujours été ainsi. Si nous remontons le temps à partir des observations actuelles et des lois de la physique que nous connaissons, un univers complètement différent se substitue, dans le passé lointain, à celui que nous connaissons. Les interactions électromagnétiques faibles et fortes, qui sont aujourd'hui si différentes les unes des autres par leur intensité et leur portée, fusionnent les unes avec les autres. Le vide quantique (c'est-à-dire l'état d'énergie minimale) passe par une série de transitions de phase : déconfinement des quarks et des gluons, annulation de la masse des bosons intermédiaires, annulation de la masse des leptoquarks vers 10^{15} GeV. Les interactions deviennent indiscernables. Les particules qui ne peuvent être différenciées que par la manière dont elles interagissent deviennent à leur tour indiscernables. Les particules qui ne peuvent être différenciées que par la manière dont elles interagissent deviennent à leur tour indiscernables (G. Cohen-Tannoudji et M. Spiro, *La matière-espace-temps*, 1990, Gallimard (Folio), p. 354).

Ces (…) exemples nous permettent de mieux comprendre la différence profonde des positions de Cournot et de Paul. Pour le premier, la stabilité de l'objet des disciplines structurelles n'est jamais affectée par les connaissances qu'apportent les disciplines historiques. A l'inverse, les événements que décrivent les disciplines historiques obéissent tout au long de leur histoire aux mêmes lois éternelles, dont la connaissance est mise en place par les disciplines structurelles (celles auxquelles Cournot réserve le nom de « science »). Il s'agit simplement, dans leur configuration singulière (par ex. notre système solaire possède 9 planètes principales), de faits que ne peuvent expliquer à elles seules les lois

---

[22] L'utilisation d'une variable t pour l'étude de la représentation linguistique du temps correspond à tout autre chose. On retrouve une variable temporelle dans l'étude de la production/reconnaissance du signal acoustique, mais il s'agit de la même variable que celle de la mécanique et la grammaire ne s'occupe pas de ces problèmes.

[23] Pour Saussure, ce fait correspond à trois éléments essentiels de sa doctrine : i) le degré d'abstraction de l'objet de la linguistique (la langue) et l'opposition de cet objet à un autre type d'objet, la parole qui, lui, est sensible aux relations temporelles ; ii) l'opposition entre la synchronie et la diachronie (…) ; iii) le rapport direct de la langue à la conscience du sujet parlant. « La première chose qui frappe quand on étudie les faits de langue, c'est que pour le sujet parlant leur succession dans le temps est inexistante : il est devant un état » (*CLG/E*, p. 117).

[24] (…)

[25] (…)

structurelles : pour l'explication, il faut recourir à des événements antérieurs et, si ceux-ci n'ont laissé subsister aucune trace, l'explication est à jamais inaccessible. Le néogrammairien postule une relation de dépendance exactement inversée entre les deux types de disciplines : c'est l'enchaînement (contingent) des événements qui explique que telle ou telle « loi » grammaticale apparaisse dans une langue. En quelque sorte, sa position (le privilège accordé à l'onto-historique) revient à celle de ses contemporains, Marx et Engels, qui avouaient ne connaître « qu'une seule science, celle de l'histoire »[26].

On ne saurait reprocher à Cournot de n'avoir pas compris l'importance du domaine onto-historique. De même, on ne saurait reprocher à la plupart des penseurs du XIX^{e} siècle d'avoir cru que ce domaine était coextensif à la culture humaine, n'affectant en rien notre conception des lois de la nature, et de considérer que les sciences humaines ne sauraient correspondre à ce que nous considérons comme des disciplines structurelles. D'un côté, ce n'est qu'avec la physique et la cosmologie moderne que se pose vraiment la question du statut onto-historique pour le socle des sciences de la nature. De l'autre, ce n'est qu'avec le développement récent des sciences humaines que l'on a pu concevoir qu'elles pouvaient aussi être classées parmi les disciplines structurelles (qu'on pense à l'économétrie ou à la description algébrique des structures de parenté, par exemple), situation qui, auparavant, ne concernait guère que la grammaire[27]. Désormais, l'un des problèmes fondamentaux qui se posent aux sciences contemporaines est de relier les disciplines structurelles et les disciplines onto-historiques. » (Auroux, 1998, pp. 145-154)

[26] (…)
[27] (…)

BIBLIOGRAPHIE

ARISTOTE, *Organon*, trad. Tricot [1959], Paris Vrin

AUROUX, Sylvain. 1998. *La raison, le langage et les normes*, Paris, PUF.

BOCHENSKI, Ignasz M. 1970. *Formale Logik*, Freiburg, K. Alber, 3e éd.

CARNAP, Rudolf. 1930-31. "Die alte und die neue Logik", *Erkenntnis*, I, pp. 12-44.

DUMMETT, Michael. 1988 [1987]. *Les origines de la philosophie analytique*, trad. fr. de M.-A. Lescourret, Paris, Gallimard.

GARDIES, Jean-Louis. 1975. *La logique du temps*, Paris, PUF.

HEIJENOORT, Jean van. 1967. *From Frege to Gödel*..., Cambridge (Mass), Harvard University Press.

HINTIKKA, Jaakko. 1962. *Knowledge and Belief : An Introduction to the Logic of the Two Notions*, Ithaca, Cornell University Press.
-. 1964. « Aristotle and the 'Master argument' of Diodorus », *American Philosophical Quarterly*, vol. 1, pp. 101-114.
-. 1996. « The Place of C.S. Peirce in the History of Logical Theory", in *Lingua Universalis vs Calculus Ratiocinator. An Ultimate Presupposition of Twentieth-Century Philosophy*, Dordrecht, Kluwer.
-. 2000. « Knowledge of Functions in the Growth of Mathematical Knowledge », in E. Grosholtz, H. Breger (eds), *The Growth of Mathematical Knowledge*, Dordrecht, Kluwer.

HINTIKKA, Jaakko, KULAS, Jack, 1985. *The Game of Language : Studies in Game Theoretical Semantics and its Applications,* Dordrecht, Reidel.

HINTIKKA, Jaakko, VANDAMME, Fernand, 1985. *Logic of Discovery, Logic of Discourse*, New York, Plenum Press.

JOINET, Jean-Baptiste. 2007. « Sur le temps logique », in J.-B. Joinet (éd.), *Logique, dynamique et cognition*, Paris, Publications de la Sorbonne.

LEWIS, Clarence Irwing. 1960 [1917]. *A Survey of Symbolic Logic*, New York, Dover.

MILNER, Jean-Claude. 1989. *Introduction à une science du langage*, Paris, Le Seuil.

POPPER, Karl. 1973 [1934], *La logique de la découverte scientifique*, trad. fr, Paris, Payot.

PRIOR, Arthur N. 1955. « Diodoran Modalities », *Philosophical Quaterly*, juillet 1955.
-. 1957. *Time and Modality*, Oxford, Clarendon Press.
-. 1967. *Past, Present and Future*, Oxford, Clarendon Press.

PUTNAM, Hilary. 1984 [1981]. *Raison, vérité et histoire*, trad. fr. A. Gerschenfeld, Paris, Ed. de Minuit.

RESCHER, Nicholas, URQUHART, Alasdair. 1971. *Temporal Logic*, Wien, Springer.

RUSSELL, Bertrand. 1908 [1900]. *La philosophie de Leibniz*, trad. fr J. Ray, Paris,

SMITH, Quentin. 1993. *Language and Time*, Oxford University Press.

VATTIMO, Gianni (éd). 1989 [1988]. *Que peut faire la philosophie de son histoire ?*, trad. fr., Paris, Le Seuil.